N.º 18 – Probabilidade: Problemas e Simulações

A probabilidade está presente sempre que estivermos perante um *fenómeno aleatório*, isto é, um fenómeno para o qual não sabemos de antemão o que vai acontecer, na próxima repetição, mas para o qual é possível verificar uma certa *regularidade a longo termo*, ou seja, para um grande número de repetições do fenómeno.

Esta regularidade estatística é utilizada para quantificar a probabilidade de um acontecimento, identificando-a com a frequência relativa com que esse acontecimento se observa, para um número grande de realizações da experiência aleatória (à realização do fenómeno aleatório chamamos experiência aleatória). Em termos estatísticos "estimamos" a probabilidade (desconhecida) da realização de um acontecimento pela frequência relativa ou percentagem de vezes com que esse acontecimento se verifica. É usual chamar a esta percentagem a *probabilidade empírica* ou *experimental*.

Quando não é possível ou não é prático repetir o fenómeno, simulamos a sua realização. A simulação é um processo artificial de representar a realização de um fenómeno aleatório.

Nesta ActivALEA são apresentados alguns exemplos em que, por simulação, se podem obter boas aproximações das probabilidades de acontecimentos, que teoricamente seriam difíceis (ou mesmo impossíveis de obter).

Está disponível para cada problema, em ficheiro auxiliar, uma aplicação informática[1] que serve de base à resolução experimental do mesmo.

[1] As aplicações informáticas foram concebidas por alunos do Curso Profissional "Técnico de Gestão e Programação de Sistemas Informáticos" da Escola Secundária de Tomaz Pelayo. A linguagem de programação utilizada foi o Visual Basic 6.0. Para executar as aplicações, apenas é necessário o sistema operativo Windows.

1. Problema Histórico

No século XVII, os jogadores italianos costumavam fazer apostas sobre o número total de pintas obtidas no lançamento de 3 dados. Acreditavam que a possibilidade de obter um total de 9 era igual à possibilidade de obter um total de 10.

Contudo, a experiência não confirmava esta ideia...
Qual dos jogadores estará em vantagem?

Resolva o problema experimentalmente, simulando vários lançamentos dos 3 dados. Para tal, aceda ao programa "Problema Histórico" e apresente uma estimativa da probabilidade dos acontecimentos:

A: "obter soma igual a 10".

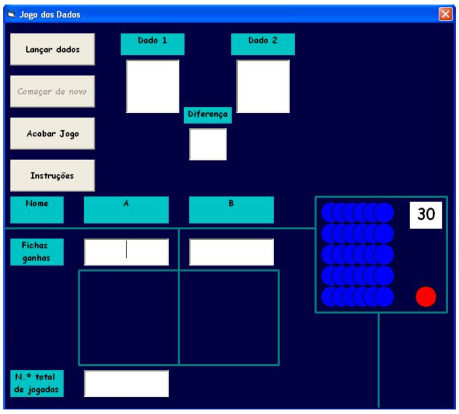
B:"obter soma igual a 9".

Nota: Pode consultar uma resolução teórica deste problema no capítulo 3 do curso "Noções de Probabilidades" em www.alea.pt/html/probabil/html/cap_03/html/cap3_1_29.html.

2. Diferença de pontos[2]

Os jogadores Y e Z inventaram um jogo de dados com as seguintes regras:

- Lançam-se dois dados e calcula-se a **diferença** entre a maior e a menor pontuação;
- Se a diferença for 0, 1 ou 2 o jogador **Y** ganha **uma** ficha;
- Se a diferença for 3, 4 ou 5, o jogador **Z** ganha **duas** fichas;
- O jogo começa com 30 fichas (mais uma de reserva) e termina quando acabarem as fichas (30 ou 31, se necessário);
- Ganha o jogador que, no final, tiver mais fichas.



Se fosse jogar este jogo, preferia ser o jogador Y ou jogador Z?

Para o ajudar a decidir, "jogue" várias vezes este jogo, utilizando o programa "Jogo_Dados".

[2] Problema retirado do manual escolar "Infinito 12B ", *Ana Maria Brito Jorge et al*, Areal Editores

3. Um jogo de cinco dados[3]

Lançam-se cinco dados. Para ganharmos, tem de sair o número 5 mas não pode sair o 6.

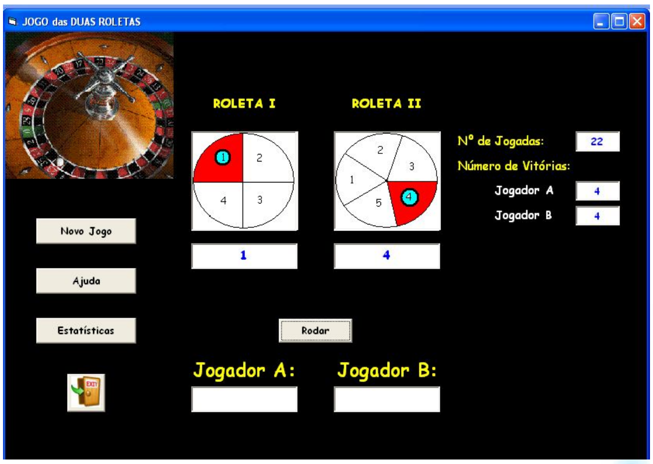
Qual é a probabilidade de ganhar?

Resolva o problema experimentalmente, simulando vários lançamentos dos 5 dados. Para tal, aceda ao programa “Sair5_Nao_Sair6 ” e apresente uma estimativa da probabilidade dos acontecimentos.

Pode consultar em anexo uma resolução teórica deste problema.

4. Jogo das duas roletas[4]

Faz-se rodar a roleta I, em seguida a roleta II, e anotam-se os números saídos, por esta ordem.



O jogador A será contemplado com um prémio se, depois de accionadas as duas roletas, os números saídos forem iguais.

O jogador B será contemplado com um prémio se, depois de accionadas as duas roletas, os números saídos forem ambos pares.

Caso os números saídos sejam iguais e ambos pares, não é atribuído o prémio.

Qual dos jogadores terá maior probabilidade de vencer?

Resolva o problema experimentalmente, utilizando a aplicação “Roletas”.

Pode consultar em anexo uma resolução teórica deste problema.

---

[3] Problema retirado de “Probabilidade e Combinatória” – Brochura do M.E. – DES – *Graça Martins, Maria Eugénia e outros*

[4] Problema adaptado do manual escolar “Espaço 12” - Edições ASA – *Costa, Belmiro e outros*

5. Uma corrida com dados[5]

O Bruno arranjou um dado especial com a forma de um dodecaedro. Tem 12 faces, numeradas de 1 a 12. A Tânia tem dois dados normais. São cubos, cada um deles com as faces numeradas de 1 a 6.

Resolveram fazer um jogo. Cada jogada consiste no lançamento dos três dados.

Vão somando os pontos que cada um obtém: o Bruno com o seu dado de 12 faces e a Tânia com os seus dois dados de 6 faces. Ganha quem primeiro chegar aos 100 pontos.

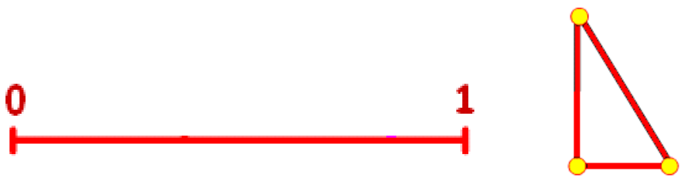
Se por acaso os dois chegarem aos 100 pontos na mesma jogada, ganha quem tiver o total maior. Se esse total for igual para os dois, há empate.

Algum dos jogadores está em vantagem? Ou o jogo é equilibrado?

Resolva o problema experimentalmente, simulando muitos jogos. Para tal, aceda ao programa “Corrida_Dados”.

6. Construir um triângulo

Um segmento de comprimento unitário é dividido em 3 partes, aleatoriamente. Qual a probabilidade de as partes resultantes poderem formar um triângulo?



Simule esta experiência várias vezes, utilizando o programa “triangulo”[6]. Apresente uma estimativa para a probabilidade pretendida.

Pode consultar em anexo uma resolução teórica deste problema.

[5] Desafios 8 - Problemas e Histórias da Matemática no Público, *José Paulo Viana*

[6] Aplicação da autoria de Rui Barreiro, Professor da Escola Secundária de Tomaz Pelayo.

Anexo – Resolução teórica de alguns problemas

3. Um jogo de cinco dados

Lançam-se cinco dados. Para ganharmos tem de sair o número 5 mas não pode sair o 6. Qual é a probabilidade de ganhar?

O número de casos possíveis quando se lançam 5 dados:

Casos possíveis $=6\text{x}6\text{x}6\text{x}6\text{x}6 = 6^5 = 7776$ (ou ${}^{6}A'_{5}$ arranjos com repetição dos 6 números)

O número de casos favoráveis (sair 5 mas não sair 6):

N.º de casos em que não sai 6 – N.º de casos em que não sai 6 nem 5 =

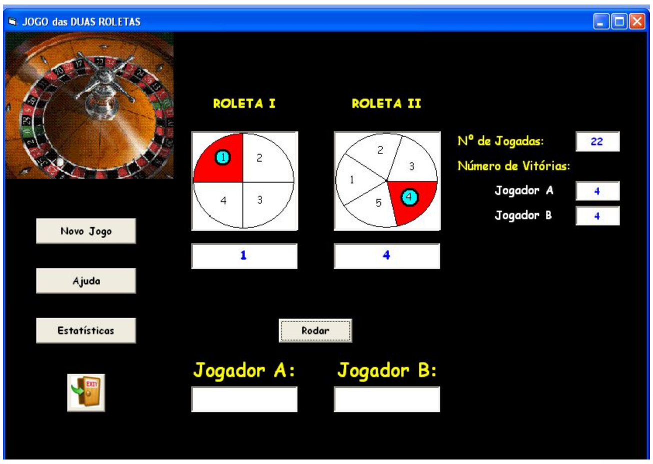
$= 5^5 - 4^5 = 3125 - 1024 = 2101$

Logo, P(sair 5 mas não sair 6) $= \dfrac{2101}{7776} \approx 0.27019$

Assim, a probabilidade de ganhar é aproximadamente 27%.

4. Jogo das duas roletas

Faz-se rodar a roleta I, em seguida a roleta II, e anotam-se os números saídos, por esta ordem.



O jogador A será contemplado com um prémio se, depois de accionadas as duas roletas, os números saídos forem iguais.

O jogador B será contemplado com um prémio se, depois de accionadas as duas roletas, os números saídos forem ambos pares.

Caso os números saídos sejam iguais e ambos pares, não é atribuído o prémio.

Qual dos jogadores terá maior probabilidade de vencer?

N.º de casos possíveis: 4x5=20

N.ºs saídos são iguais nas 2 roletas: (1,1), (2,2), (3,3) e (4,4)

Mas (2,2) e (4,4) são iguais e ambos pares: então, não é atribuído o prémio; logo:

N.º de casos favoráveis ao jogador A: 2

$$\text{P (jogador A vencer)} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0,1$$

N.ºs saídos são ambos pares: (2,2), (2,4), (4,2) e (4,4)

Mas (2,2) e (4,4) são ambos pares e iguais: então, não é atribuído o prémio; logo:

N.º de casos favoráveis ao jogador B: 2

$$\text{P (jogador B vencer)} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0,1$$

Assim, a probabilidade de o jogador A vencer é igual à probabilidade de o jogador B vencer.

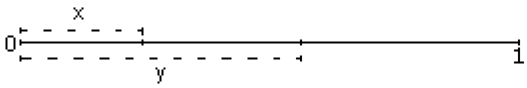
6. Construir um triângulo[7]

Um segmento de comprimento unitário é dividido em 3 partes, aleatoriamente. Calcule a probabilidade de com as partes resultantes se poder construir um triângulo.
Nota – Quando se fala em números aleatórios, estamos intuitivamente a pensar em números com um distribuição uniforme, no intervalo (0,1).

Consideremos duas variáveis aleatórias X e Y (com distribuição uniforme no intervalo (0,1)) e independentes:

- X tem distribuição uniforme no intervalo (0,1);
- Y tem distribuição uniforme no intervalo (0,1).

Quando se seleccionam 2 números, um com distribuição X e outro com distribuição Y, podemos ter uma de duas situações: X<Y ou X>Y.
1º caso – X<Y



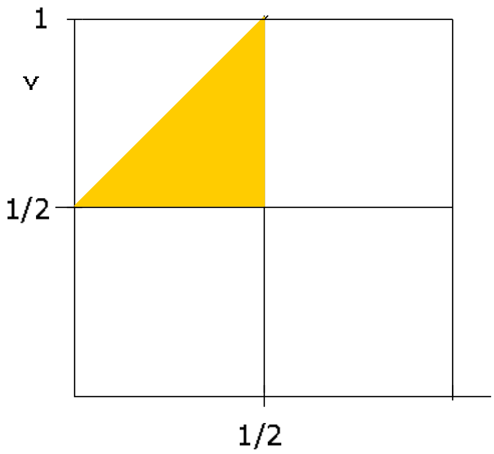
Lados do (pressuposto) triângulo:

X (Y-X) (1-Y)

Para que possam, efectivamente, ser os lados de um triângulo, cada lado tem de ser inferior à soma dos outros dois:

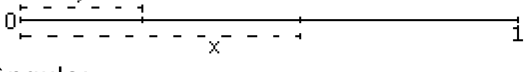
$$\begin{cases} X < (Y-X) + (1-Y) \\ Y - X < X + (1-Y) \\ (1-Y) < X + (Y-X) \end{cases} \text{ ou seja } \begin{cases} X < 1/2 \\ Y - X < 1/2 \\ Y > 1/2 \end{cases}$$

Estas condições conduzem à área do triângulo assinalado na figura seguinte:



A probabilidade de as variáveis X e Y satisfazerem as condições exigidas é igual à área do triângulo assinalado (área favorável sobre área possível, que é 1), que é igual a 0,125.

2º caso – X>Y



Lados do (pressuposto) triângulo:

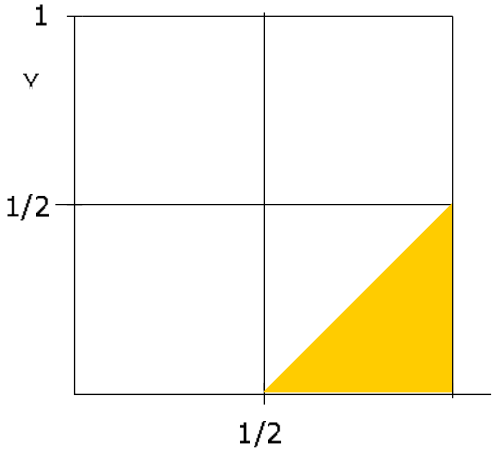
Y (X-Y) (1-X)

Para que possam, efectivamente, ser os lados de um triângulo, cada lado tem de ser inferior à soma dos outros dois:

[7] A resolução teórica deste problema é mais complexa. Contudo, apresenta-se uma resolução com a intenção de ser acessível aos alunos do ensino secundário (12.ºano em particular) mais curiosos e interessados neste assunto.

$$\begin{cases} Y < (X - Y) + (1 - X) \\ X - Y < Y + (1 - X) \\ (1 - X) < Y + (X - Y) \end{cases} \quad \text{ou seja} \quad \begin{cases} Y < 1/2 \\ X - Y < 1/2 \\ X > 1/2 \end{cases}$$

Estas condições conduzem à área do triângulo assinalado na figura seguinte:



A probabilidade de as variáveis X e Y satisfazerem as condições exigidas é igual à área do triângulo assinalado (área favorável sobre área possível, que é 1), que é igual a 0,125.

Calculemos, então, a probabilidade de termos um triângulo:
P(triângulo) = P((X<1/2 e Y-X<1/2 e Y>1/2)/X<Y)P(Y>X)+P((Y<1/2 e X-Y<1/2 e X>1/2)/X>Y) P(X>Y)

P(triângulo) = P(X<Y e (X<1/2 e Y-X<1/2 e Y>1/2)) + P(X>Y e (Y<1/2 e X-Y<1/2 e X>1/2))

P(triângulo) = P(X<1/2 e Y-X<1/2 e Y>1/2) + P(Y<1/2 e X-Y<1/2 e X>1/2)

P(triângulo) = 0,125+0,125

P(triângulo) = 0,25