ActivALEA
active e actualize a sua literacia

N.º 33 – Os acontecimentos são independentes? Depende...

Maria Eugénia Graça Martins
FCUL
memartins@fc.ul.pt

Março 2025

Os acontecimentos são independentes? Depende… Mas depende de quê?

Nesta ActivALEA vamos ver que a propriedade da **independência de acontecimentos** depende do modelo de probabilidade associado ao espaço de resultados dos acontecimentos e não é uma propriedade intrínseca dos acontecimentos.

E atenção! Se dois acontecimentos são disjuntos ou incompatíveis, não podem ser independentes...

Dados dois acontecimentos A e B, dizemos que são **independentes** quando a ocorrência de um deles não altera a probabilidade de ocorrência do outro (pode consultar, a este respeito, a ActivAlea n.º 32).

Se $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$, é usual traduzir este facto utilizando a probabilidade condicionada e escrevendo

$$P(A|B) = P(A) \text{ ou } P(B|A) = P(B).$$

Apresenta-se a seguir uma definição de **independência de acontecimentos** que, embora não seja tão intuitiva como a anterior, é menos restritiva, na medida em que não exige que $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$.

Acontecimentos independentes

Dois acontecimentos A e B do mesmo espaço de resultados dizem-se independentes, se e só se

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Repare-se que, como consequência da definição anterior, se exigirmos que $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$, então

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\times P(B)}{P(B)} = P(A) \quad \text{e} \quad P(B|A) = P(B)$$

e as duas definições de independência são equivalentes.

Para mostrar que a independência de acontecimentos depende do modelo de probabilidade do espaço de resultados subjacente aos acontecimentos, considere-se o exemplo seguinte.

Exemplo (Adaptado de Murteira, B.)[1] - Considere-se uma moeda de um euro, não necessariamente equilibrada, e suponha-se que, no lançamento da moeda, se tem para a face que fica visível

$$P(E) = p,\ P(N) = 1 - p,\ 0 \le p \le 1,$$

onde se representou por E e N, respetivamente, as faces Euro e Nacional.
Considerem-se os acontecimentos

$$A = \{EEE, EEN, ENE, NEE\} \quad \text{e} \quad B = \{EEE, NNN\},$$

associados a três lançamentos da moeda.
Como a moeda "não tem memória", os lançamentos são independentes uns dos outros, donde

$$P(EEE) = P(E)\times P(E)\times P(E) = p^3,\ P(EEN) = P(E)\times P(E)\times P(N) = p^2(1-p), \text{ etc.}$$

Então,

$$P(A) = p^3 + 3p^2(1-p) \quad \text{e} \quad \mathrm{P(B)} = p^3 + (1-p)^3.$$

Será que os acontecimentos A e B são independentes? Para que isso aconteça, é necessário que $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$, ou seja,

$$p^3 = (p^3 + 3p^2(1-p))\,(p^3 + (1-p)^3). \qquad (1)$$

É imediato que a igualdade anterior se verifica para $p = 0$ e $p = 1$. Da resolução da equação

$$(2p^2 - 3p + 1)(p - 1) = 0,$$

equivalente a (1), vem que

$$P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$$

só nos casos triviais em que $p = 0$, $p = 1$ ou quando a moeda é equilibrada!

Assim, os acontecimentos A e B **podem ser ou não independentes**, conforme o modelo de probabilidade considerado para os resultados do espaço de resultados, associado à experiência aleatória do lançamento da moeda.

[1] Murteira, B. et al. *Introdução à Estatística*, McGraw-Hill, 2001, pag.87.

Independência e incompatibilidade entre acontecimentos

Ao contrário da propriedade de independência, a propriedade de incompatibilidade entre acontecimentos é uma propriedade intrínseca dos acontecimentos. Dois acontecimentos A e *B*, incompatíveis ou disjuntos, não podem ser independentes, a não ser na situação trivial em que $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$.

Se os acontecimentos A e B são incompatíveis e $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$, então não podem ser independentes, já que

$$P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0 \neq P(A) \times P(B) \ > \ 0$$

A conclusão anterior é intuitiva, já que dois acontecimentos são disjuntos quando a realização de um deles implica a não realização do outro.

Nota – Enquanto os diagramas de Venn são úteis para visualizar a incompatibilidade entre dois acontecimentos, o mesmo não acontece com a independência, em que não podem ser utilizados, por esta propriedade não ser unicamente caraterística dos acontecimentos.