

N.º 35 – Vamos calcular a probabilidade de um acontecimento?



Sim, mas vamos por “partes”...

Regra da probabilidade total
Fórmula de Bayes

Maria Eugénia Graça Martins
FCUL memartins@fc.ul.pt
Emília Oliveira
Escola Secundária de Tomaz Pelayo
ecmo.estp@gmail.com
Abril 2025



A regra da **probabilidade total** diz-nos que, se se pretender calcular a probabilidade de um acontecimento, pode ser útil começar por considerar uma “partição” do espaço de resultados associado ao acontecimento e calcular a probabilidade condicional relativa a cada uma das partes...

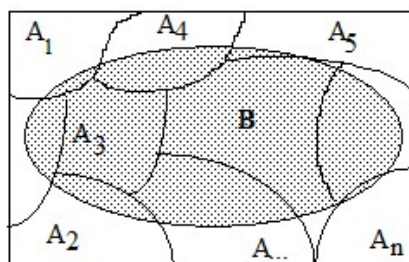
Formalização da regra da probabilidade total

Se os acontecimentos $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ constituem uma partição do espaço de resultados, isto é, A_i e A_j são disjuntos dois a dois e a união dos acontecimentos A_i é igual ao espaço de resultados, com $P(A_i) > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, então, dado qualquer acontecimento B , com $P(B) > 0$, tem-se

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$$

Esta regra também é conhecida pelo **Teorema da probabilidade total**.

O seguinte diagrama de Venn ilustra a situação em que se tem um acontecimento B , com $P(B) > 0$, que pode ter sido provocado por qualquer um dos acontecimentos A_1, \dots, A_n , que constituem uma partição do espaço de resultados,



Repare-se que se pode escrever

$$P(B) = P((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_n)),$$

pelo que a probabilidade da união dos acontecimentos é igual à soma das probabilidades

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n),$$

pois os acontecimentos $(B \cap A_1), (B \cap A_2), \dots, (B \cap A_n)$, são disjuntos 2 a 2, tendo em consideração que os $A_i, i = 1, \dots, n$, constituem uma partição do espaço de resultados.

Então, tendo em conta que, para cada $A_i, i = 1, \dots, n$,

$$P(B \cap A_i) = P(A_i) P(B|A_i),$$

obtém-se a seguinte expressão para **a regra da probabilidade total**,

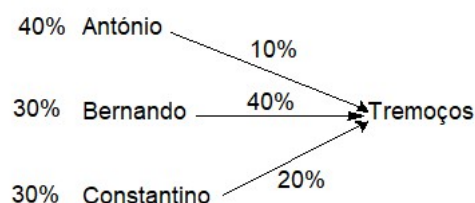
$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$$

Exemplificação da regra da probabilidade total

Exemplo 1 (adaptado de Graça Martins, M. E. *Introdução à Probabilidade e à Estatística*, SPE, 2005) – Numa cervejaria trabalham 3 empregados: o António, o Bernardo e o Constantino. O António serve 40% dos clientes e os outros dois dividem entre si a restante clientela. Ao pedir uma cerveja, o acompanhamento desta por tremoços é deixada ao critério do empregado. O António é sócio da cervejaria, pelo que apenas traz tremoços em 10% das vezes. O Bernardo oferece tremoços em 40% dos casos, enquanto o Constantino apenas oferece os tremoços a 20% dos clientes.

1. Um cliente pede uma cerveja. Qual é a probabilidade de esta vir acompanhada de tremoços?

Para resumir a informação anterior, pode-se considerar o seguinte esquema, onde se representa por António, Bernardo e Constantino, o empregado que serve o cliente:

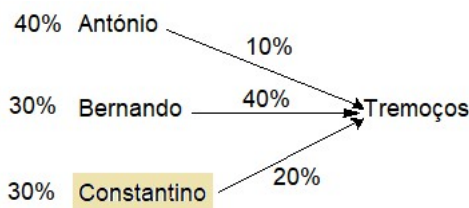


$$P(\text{Tremoços}) = P(\text{Tremoços}|\text{António}) P(\text{António}) + P(\text{Tremoços}|\text{Bernardo}) P(\text{Bernardo}) \\ + P(\text{Tremoços}|\text{Constantino}) P(\text{Constantino})$$

$$P(\text{Tremoços}) = 0,10 \times 0,40 + 0,40 \times 0,30 + 0,20 \times 0,30 = 0,22$$

Assim, quando o cliente pede uma cerveja, a probabilidade de esta vir acompanhada com tremoços é de 22%.

2. Suponha agora que se sabe que a cerveja que o cliente pediu vinha acompanhada de tremoços. Qual a probabilidade de ter sido o Constantino a servi-lo?



Sabe-se que a probabilidade de ser o Constantino a servir o cliente é 0,30. Com a informação adicional de que a cerveja veio acompanhada de tremoços, será que essa probabilidade se alterou? Vejamos:

$$\begin{aligned}
 P(\text{Constantino}|\text{Tremoços}) &= \frac{P(\text{Constantino} \cap \text{Tremoços})}{P(\text{Tremoços})} \\
 &= \frac{P(\text{Constantino}) P(\text{Tremoços}|\text{Constantino})}{P(\text{Tremoços})} = \frac{0,30 \times 0,20}{0,22} \approx 0,2727
 \end{aligned}$$

Ou seja, com a informação disponível, a probabilidade *a posteriori* de ter sido o Constantino a servir o cliente é, aproximadamente, 27%. Recorde que, sem a informação adicional, a probabilidade *a priori*, de que tivesse sido o Constantino a servir a cerveja era 30%, pelo que se pode dizer que esta probabilidade foi corrigida!

Exemplo 2 (adaptado de Graça Martins, M. E. *Introdução à Probabilidade e à Estatística*, SPE, 2005) – Num centro de cálculo existem três impressoras *A*, *B* e *C*, que imprimem a velocidades diferentes. Os ficheiros são enviados para a primeira impressora que estiver disponível. A probabilidade de um ficheiro ser enviado para as impressoras *A*, *B* ou *C* é respectivamente 0,6, 0,3 e 0,1. Ocasionalmente a impressora avaria e destrói a impressão. As impressoras *A*, *B* e *C* avariam com probabilidades 0.01, 0.05 e 0.04.

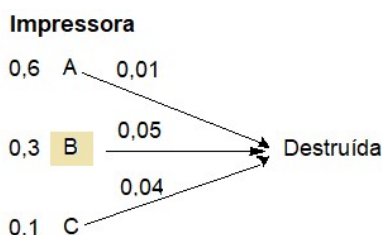
1. Qual a probabilidade de a impressão de um ficheiro enviado por si ser destruída?

A informação anterior pode ser apresentada numa tabela, que facilita os cálculos:

Impressora	$P(\text{Impressora})$	$P(\text{Destruída} \text{Impressora})$	$P(\text{Impressora}) P(\text{Destruída} \text{Impressora})$
<i>A</i>	0,6	0,01	0,006
<i>B</i>	0,3	0,05	0,015
<i>C</i>	0,1	0,04	0,004
Total	1,0		0,025

Pela tabela anterior verifica-se que a probabilidade pretendida é 2,5%.

2. Suponha agora que o ficheiro que enviou para impressão foi destruído. Qual a probabilidade de ter sido enviado para a impressora *B*?



Sabe-se que a probabilidade de um ficheiro ser enviado para a impressora B é 0,3. Com a informação adicional de que a impressão foi destruída, pretende-se calcular a $P(B|Destruída)$:

$$P(B|Destruída) = \frac{P(B \cap Destruída)}{P(Destruída)} = \frac{P(B) P(Destruída|B)}{P(Destruída)} = \frac{0,3 \times 0,05}{0,025} = \frac{0,015}{0,025} = 0.6$$

Repare-se que, com a informação adicional de que a impressão do ficheiro foi destruída, a probabilidade de o ficheiro ter ido para a impressora B foi corrigida de 30% para 60%!

Nos dois exemplos anteriores, foi utilizada uma fórmula, a **fórmula de Bayes**, que permite **reavaliar** as probabilidades dos acontecimentos que constituem a partição do espaço de resultados, quando se dispõe de informação adicional sobre a realização de determinado acontecimento e se conhecem as probabilidades deste acontecimento se ter realizado, condicionadas à realização de cada um dos acontecimentos que constituem a partição.

Fórmula de Bayes

Se $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ constituem uma partição do espaço de resultados, isto é, A_i e A_j são disjuntos dois a dois e a união dos acontecimentos A_i é igual ao espaço de resultados, com $P(A_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n$, então, dado qualquer acontecimento B , com $P(B) > 0$, tem-se

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)}$$

Esta fórmula também é conhecida pelo **Teorema de Bayes**.

Nota (Murteira, B. et al, Introdução à Estatística, McGrawHill, 2001, página 82) – Repare-se que, na vida prática ou no estudo das ciências empíricas, a «informação» adquirida pode, regra geral, traduzir-se pelo conhecimento da realização de determinado acontecimento, eventualmente complexo. Evidentemente, há toda a vantagem em reavaliar as probabilidades ou credibilidades quando se dispõe de informação adicional em que se deposita confiança; não o fazer implica desprezar essa informação.