TarefALEA - Probabilidade

N.º 1 – O desafio da professora de Matemática

No início da aula de Matemática, a professora propôs o seguinte desafio aos alunos da turma, numerados de 1 a 20: «Vamos selecionar, aleatoriamente, dois de vocês. Se o máximo dos números dos 2 alunos selecionados for menor ou igual a 12, amanhã vamos todos almoçar a uma pizaria e eu pago o almoço. Caso contrário são vocês que me pagam o almoço a mim!»

Aceitam este desafio?[1]

Depois de a professora ter lançado o desafio, os alunos ficaram muito entusiasmados, pois com um desafio destes "o almoço estava no papo"! Efetivamente, depois de trocarem algumas ideias, concluíram que eram mais as situações que lhes eram favoráveis, já que ganhariam um almoço se o máximo fosse 1, 2, 3, ..., 12, ou seja, havia 12 situações favoráveis, e só perderiam se o máximo fosse 13, 14, 15, ..., 20, ou seja, 8 situações desfavoráveis.

Desafio aceite!

Ainda com grande entusiasmo propuseram-se estudar a situação, que permitiria responder a algumas questões, como as seguintes.

Algumas questões

- Este desafio é favorável a quem?
- Qual a probabilidade de a professora ter de pagar o almoço aos alunos?
- Se o desafio te fosse proposto, aceitarias, confiante?

O primeiro passo para o cálculo da probabilidade pretendida será considerar a estratégia para selecionar os dois alunos da turma.

---

[1] A imagem foi adaptada de https://www.shutterstock.com/pt/image-vector/random-sampling-analysis-method-vector-illustration-1667906803

1. Estratégia para selecionar 2 alunos aleatoriamente

i. Cortar uma folha de papel em 20 pedaços (tantos quantos os alunos da turma) e escrever em cada pedaço o número de cada aluno;

ii. Inserir os 20 papéis num saco;

iii. Selecionar 2 dos papéis do saco. Aqui surgiu um problema, pois poderiam utilizar duas metodologias diferentes:

   a) Selecionar um papel, ver o número, colocá-lo novamente no saco e, depois de baralhar, selecionar novamente outro papel e registar o número – seleção com reposição;

   b) Selecionar os 2 papéis simultaneamente, ou um seguido do outro, sem repor o primeiro, e registar os números – seleção sem reposição.

iv. Havendo 2 metodologias para a seleção aleatória dos alunos, a professora informou que, se a seleção dos dois alunos fosse para constituir uma comissão, só a metodologia sem reposição seria possível, mas para este jogo qualquer uma serviria. Pediu então aos alunos que estudassem as duas estratégias possíveis.

2. Cálculo da probabilidade de a professora ter de pagar o almoço aos alunos, numa seleção com reposição ou sem reposição

2.1 Com reposição

Represente-se por A o acontecimento "A professora paga o almoço aos alunos". Este acontecimento é constituído pelos resultados, que representamos por (i,j), com $i = 1,\ldots,12$, $j = 1,\ldots,12$, onde i representa o número do 1.º aluno selecionado e j o do 2.º aluno selecionado.

$$
\begin{aligned}
P(A) = P((1,1)\ &\boldsymbol{ou}\ (1,2)\ \boldsymbol{ou}\ (1,3)\ \boldsymbol{ou} \ldots \boldsymbol{ou}\ (1,12)\ \boldsymbol{ou} \\
&\boldsymbol{ou}\ (2,1)\ \boldsymbol{ou}\ (2,2)\ \boldsymbol{ou}\ (2,3)\ \boldsymbol{ou} \ldots \boldsymbol{ou}\ (2,12)\ \boldsymbol{ou} \\
&\boldsymbol{ou}\ (3,1)\ \boldsymbol{ou}\ (3,2)\ \boldsymbol{ou}\ (3,3)\ \boldsymbol{ou} \ldots \boldsymbol{ou}\ (3,12)\ \boldsymbol{ou} \\
&\ldots \\
&\boldsymbol{ou}\ (12,1)\ \boldsymbol{ou}\ (12,2)\ \boldsymbol{ou}\ (12,3)\ \boldsymbol{ou} \ldots \boldsymbol{ou}\ (12,12))
\end{aligned}
$$

Os acontecimentos elementares (i,j), $i = 1,\ldots 12$, $j = 1,\ldots,12$, são **disjuntos**, dois a dois, pelo que a probabilidade da união é igual à soma das probabilidades, e a probabilidade anterior vem

$$
\begin{aligned}
P(A) = P((1,1)) + P((1,2)) + P((1,3)) + \ldots + P((1,12)) + &\quad \text{(12 parcelas)} \\
+P((2,1)) + P((2,2)) + P((2,3)) + \ldots + P((2,12)) + &\quad \text{(12 parcelas)} \\
+P((3,1)) + P((3,2)) + P((3,3)) + \ldots + P((3,12)) + &\quad \text{(12 parcelas)} \qquad (1) \\
\ldots & \\
+P((12,1)) + P((12,2)) + P((12,3)) + \ldots + P((12,12)) &\quad \text{(12 parcelas)}
\end{aligned}
$$

onde se representou por $P((i,j))$ a probabilidade do acontecimento representado por (i,j). Por outro lado, os acontecimentos "N.º do 1.º aluno selecionado" e "N.º do 2.º aluno selecionado" são **independentes**, pois o resultado da saída do segundo não depende do resultado da saída do primeiro, pelo que, para quaisquer $i = 1, \dots, 20$ e $j = 1, \dots, 20$,

$$\begin{aligned} P((i,j)) &= P(\text{Ser } i \text{ o n.º selecionado entre 1 e 20}) \times P(\text{Ser } j \text{ o n.º selecionado entre 1 e 20}) \\ &= \frac{1}{20} \times \frac{1}{20} \\ &= \frac{1}{400} \end{aligned}$$

Como o número de parcelas de (1) é 144, vem para a probabilidade pretendida

$$P(A) = \frac{144}{400} = 0{,}36$$

Assim, a probabilidade de a professora pagar o almoço é 36%, pelo que a probabilidade de serem os alunos a pagar o almoço é 64%! Que desilusão para os alunos...

Outra abordagem...

Considere-se o **espaço de resultados** associado à experiência aleatória que consiste em selecionar aleatoriamente 2 números entre 1 e 20, com reposição. Este espaço de resultados é constituído pelos pares (i,j), com $i = 1, 2, \dots, 20$ e $j = 1, \dots, 20$, e pode ser apresentado pela seguinte tabela, onde cada célula representa um resultado:

		Número 2.º aluno a ser selecionado																			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Número 1.º aluno a ser selecionado	1																				
	2																				
	3																				
	4																				
	5																				
	6																				
	7																				
	8																				
	9																				
	10																				
	11																				
	12																				
	13																				
	14																				
	15																				
	16																				
	17																				
	18																				
	19																				
	20																				

Na tabela anterior estão representados todos os resultados do espaço de resultados, em número de 400, igualmente prováveis. Assinalados a verde estão os resultados favoráveis ao acontecimento A, pelo que, segundo a regra de Laplace, tem-se

$$P(A) = \frac{\text{Número de resultados favoráveis a A}}{\text{Número de resultados possíveis}} = \frac{144}{400}$$

confirmando o resultado a que se tinha chegado anteriormente.

2.2 Sem reposição

Como anteriormente, representa-se por (i, j), $i = 1, \ldots, 20$ e $j = 1, \ldots, 20$, com $\boldsymbol{i \neq j}$, o resultado obtido quando o 1.º **e** o 2.º alunos selecionados são, respetivamente, i e j e por $P((i, j))$ a probabilidade do acontecimento "o 1.º aluno selecionado tem o n.º i e o 2.º aluno selecionado tem o n.º j". Assim,

$$\begin{aligned} P(A) \ = \ & P((1,2)\ \boldsymbol{ou}\ (1,3)\ \boldsymbol{ou} \ldots \boldsymbol{ou}\ (1,12)\ \boldsymbol{ou} \\ & (2,1)\ \boldsymbol{ou}\ (2,3)\ \boldsymbol{ou}\ (2,4)\ \boldsymbol{ou} \ldots \boldsymbol{ou}\ (2,12)\ \boldsymbol{ou} \\ & (3,1)\ \boldsymbol{ou}\ (3,2)\ \boldsymbol{ou}\ (3,4)\ \boldsymbol{ou} \ldots \boldsymbol{ou}\ (3,12)\ \boldsymbol{ou} \\ & \ldots \\ & (12,1)\ \boldsymbol{ou}\ (12,2)\ \boldsymbol{ou} \ldots \boldsymbol{ou}\ (12,11)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A) = \ & P((1,2)) + P((1,3)) + \ldots + P((1,12)) + && \text{(11 parcelas)} \\ & P((2,1)) + P((2,3)) + P((2,4)) + \ldots + P((2,12)) + && \text{(11 parcelas)} \\ & P((3,1)) + P((3,2)) + P((3,4)) + \ldots + P((3,12)) + && \text{(11 parcelas)} \qquad (2) \\ & \ldots \\ & + P((12,1)) + P((12,2)) + \ldots + P((12,11)) && \text{(11 parcelas)} \end{aligned}$$

Repare-se que agora, após o 1.º aluno ser selecionado, para a seleção do 2.º aluno já não pode entrar o aluno selecionado, logo

$P\big((i, j)\big) = P$(Ser selecionado um n.º entre 1 e 20)$\times$ P(Ser selecionado um n.º entre 1 e 20 diferente do que saiu anteriormente), ou seja,

$$P(i, j) = \frac{1}{20} \times \frac{1}{19}$$

Como o número de parcelas de (2) é 132, vem para a probabilidade pretendida

$$P(A) = \frac{132}{380} = 0{,}347$$

Assim, a **probabilidade de a professora pagar o almoço é aproximadamente 35%**, pelo que a probabilidade de serem os alunos a pagar o almoço é 65%! A estratégia da seleção sem reposição ainda é um pouco pior para os alunos!...

Outra abordagem ...

Considere-se o espaço de resultados associado à experiência aleatória que consiste em selecionar aleatoriamente 2 números entre 1 e 20, sem reposição. Este espaço de resultados é constituído pelos resultados, representados por (i, j), com $i = 1, 2, \ldots, 20$ e $j = 1, \ldots, 20$, com $i \neq j$, apresentados na seguinte tabela:

		Número 2.º aluno a ser selecionado																			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Número 1.º aluno a ser selecionado	1																				
	2																				
	3																				
	4																				
	5																				
	6																				
	7																				
	8																				
	9																				
	10																				
	11																				
	12																				
	13																				
	14																				
	15																				
	16																				
	17																				
	18																				
	19																				
	20																				

Na tabela anterior estão representados todos os resultados do espaço de resultados, em número de 380, igualmente possíveis. Assinalados a verde estão os resultados favoráveis ao acontecimento A, pelo que, segundo a regra de Laplace, temos

$$P(A) = \frac{\text{Número de resultados favoráveis a A}}{\text{Número de resultados possíveis}} = \frac{132}{380} = 0{,}347$$

confirmando o resultado de aproximadamente 35% a que se tinha chegado anteriormente, para a probabilidade de a professora ter de pagar o almoço.

3. Aproximação frequencista da probabilidade - Utilização da simulação

3.1 Introdução

A **probabilidade empírica** ou **frequencista** de um acontecimento A, representada por $P(A)$, pode ser definida como o valor para o qual estabiliza a frequência relativa da realização de A, num grande número de repetições da experiência aleatória efetuadas nas mesmas condições, que conduza à realização desse acontecimento. Não se consegue prever o que acontece em cada realização do fenómeno aleatório, mas, ao fim de um grande número de repetições do fenómeno, ele apresenta um padrão característico de comportamento, que faz com que seja possível obter um modelo para esse comportamento. Esta "previsibilidade" do fenómeno aleatório, conduz-nos a uma espécie de contradição, na medida em que nos leva a crer que o "acaso pode ser governado" ou, como dizia J. Tiago de Oliveira, "O Acaso é a única coisa que não acontece por acaso"[2]!

Na situação em estudo, a experiência aleatória consiste em selecionar, aleatoriamente, 2 números de um conjunto de números de 1 a 20 e verificar se satisfazem as condições indicadas, ou seja, o acontecimento A, de que queremos estimar a probabilidade, é que o máximo dos 2 números selecionados seja inferior a 13. Repetir esta experiência, muitas e muitas vezes, nas mesmas condições, faz-se utilizando um processo em que se usa a tecnologia e ao qual se dá o nome de **simulação**. Neste caso, vai-se utilizar a folha de cálculo Excel, para imitar o comportamento (físico) do fenómeno aleatório de retirar 2 papéis de um saco, e verificar os números aí inscritos, como se descreveu em 1. Repete-se a experiência um grande número de vezes e considera-se como estimativa da probabilidade do acontecimento o valor para o qual estabilizou a frequência relativa com que o acontecimento se verificou nessas repetições. Teoricamente, quanto maior for o número de repetições, melhor será a estimativa.

[2] "O Acaso é a única coisa que não acontece por acaso", in *Matemática e Cultura,* Centro Nacional de Cultura, Cosmos, 1992.

3.2 Metodologia para implementação da simulação

3.2.1 Com reposição

Considere-se uma folha de Excel, de que se apresenta a seguir uma parte, em que se visualizam as fórmulas:

	A	B	C	D	E
1	**Seleção com reposição 1º num**	**2º num**			**A professora paga o almoço**
2	=INT(RAND()*20)+1	=INT(RAND()*20)+1	=IF(A2<13;1;0)	=IF(B2<13;1;0)	=IF(C2*D2=1;1;0)
3	=INT(RAND()*20)+1	=INT(RAND()*20)+1	=IF(A3<13;1;0)	=IF(B3<13;1;0)	=IF(C3*D3=1;1;0)
4	=INT(RAND()*20)+1	=INT(RAND()*20)+1	=IF(A4<13;1;0)	=IF(B4<13;1;0)	=IF(C4*D4=1;1;0)
5	=INT(RAND()*20)+1	=INT(RAND()*20)+1	=IF(A5<13;1;0)	=IF(B5<13;1;0)	=IF(C5*D5=1;1;0)
6	=INT(RAND()*20)+1	=INT(RAND()*20)+1	=IF(A6<13;1;0)	=IF(B6<13;1;0)	=IF(C6*D6=1;1;0)
7	=INT(RAND()*20)+1	=INT(RAND()*20)+1	=IF(A7<13;1;0)	=IF(B7<13;1;0)	=IF(C7*D7=1;1;0)
8	=INT(RAND()*20)+1	=INT(RAND()*20)+1	=IF(A8<13;1;0)	=IF(B8<13;1;0)	=IF(C8*D8=1;1;0)
9	=INT(RAND()*20)+1	=INT(RAND()*20)+1	=IF(A9<13;1;0)	=IF(B9<13;1;0)	=IF(C9*D9=1;1;0)

…

	A	B	C	D	E
994	=INT(RAND()*20)+1	=INT(RAND()*20)+1	=IF(A994<13;1;0	=IF(B994<13;1;0	=IF(C994*D994=1;1;0)
995	=INT(RAND()*20)+1	=INT(RAND()*20)+1	=IF(A995<13;1;0	=IF(B995<13;1;0	=IF(C995*D995=1;1;0)
996	=INT(RAND()*20)+1	=INT(RAND()*20)+1	=IF(A996<13;1;0	=IF(B996<13;1;0	=IF(C996*D996=1;1;0)
997	=INT(RAND()*20)+1	=INT(RAND()*20)+1	=IF(A997<13;1;0	=IF(B997<13;1;0	=IF(C997*D997=1;1;0)
998	=INT(RAND()*20)+1	=INT(RAND()*20)+1	=IF(A998<13;1;0	=IF(B998<13;1;0	=IF(C998*D998=1;1;0)
999	=INT(RAND()*20)+1	=INT(RAND()*20)+1	=IF(A999<13;1;0	=IF(B999<13;1;0	=IF(C999*D999=1;1;0)
1000	=INT(RAND()*20)+1	=INT(RAND()*20)+1	=IF(A1000<13;1;	=IF(B1000<13;1;	=IF(C1000*D1000=1;1;0)
1001	=INT(RAND()*20)+1	=INT(RAND()*20)+1	=IF(A1001<13;1;	=IF(B1001<13;1;	=IF(C1001*D1001=1;1;0)
1002					=SUM(E2:E1001)

e com os resultados:

	A	B	C	D	E
1	**Seleção com reposição 1º num**	**2º num**			**A professora paga o almoço**
2	3	11	1	1	1
3	6	11	1	1	1
4	20	19	0	0	0
5	1	4	1	1	1
6	8	15	1	0	0
7	13	13	0	0	0
8	9	2	1	1	1
9	16	4	0	1	0

…

	A	B	C	D	E
992	13	14	0	0	0
993	20	8	0	1	0
994	9	14	1	0	0
995	10	5	1	1	1
996	14	1	0	1	0
997	6	6	1	1	1
998	12	12	1	1	1
999	2	16	1	0	0
1000	7	1	1	1	1
1001	15	11	0	1	0
1002					360

Como se verifica na folha de Excel, que mostra as fórmulas, a metodologia seguida consistiu em:

i) Gerar dois números aleatórios[3] entre 1 e 20, nas colunas A e B;

ii) Nas colunas C e D, testar se os números são menores que 13. Caso isso aconteça, considerar 1; caso contrário, considerar 0;

iii) Na coluna E, testar se os 2 números gerados satisfazem a condição exigida, fazendo o produto dos valores obtidos nas colunas C e D, já que o produto só virá igual a 1 caso os dois fatores sejam iguais a 1;

iv) Repetir o processo 1000 vezes;

v) Obter a tabela com a frequência absoluta acumulada e a evolução da frequência relativa, à medida que o número de repetições aumenta, conforme se mostra a seguir:

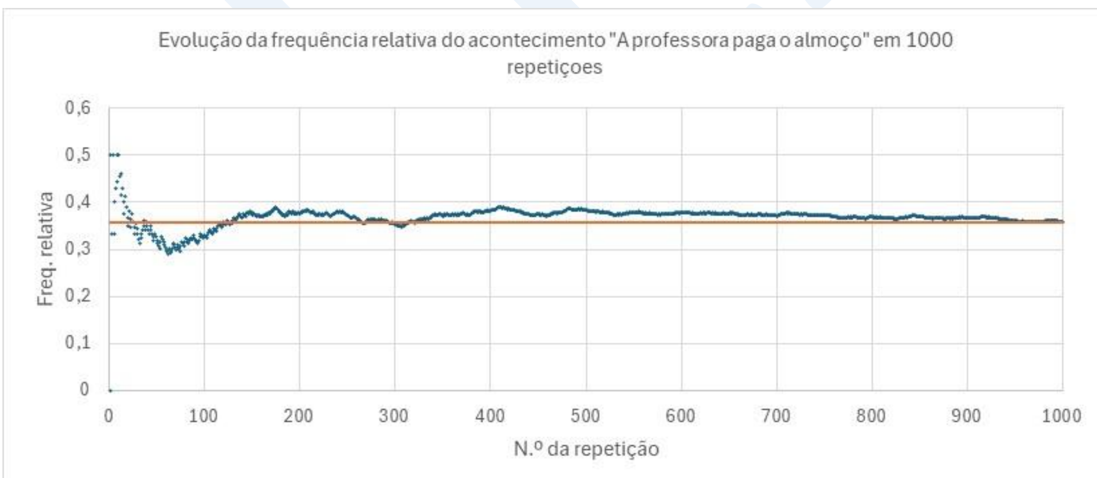
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Seleção com reposição** **1º num**	**2º num**			**A professora paga o almoço**		**Nº repetição**	**Freq. abs. acum.**	**Evol. freq. rel.**
2	3	11	1	1	1		1	1	1
3	6	11	1	1	1		2	2	1
4	20	19	0	0	0		3	2	0,666667
5	1	4	1	1	1		4	3	0,75
6	8	15	1	0	0		5	3	0,6
7	13	13	0	0	0		6	3	0,5
8	9	2	1	1	1		7	4	0,571429
9	16	4	0	1	0		8	4	0,5
10	12	7	1	1	1		9	5	0,555556
11	3	2	1	1	1		10	6	0,6
12	17	17	0	0	0		11	6	0,545455

...

[3] Mais corretamente, os números são pseudo-aleatórios, já que são gerados por um algoritmo matemático, comportando-se, no entanto, como se fossem aleatórios.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
989	7	4	1	1	1		988	355	0,359312
990	2	8	1	1	1		989	356	0,35996
991	13	8	0	1	0		990	356	0,359596
992	13	14	0	0	0		991	356	0,359233
993	20	8	0	1	0		992	356	0,358871
994	9	14	1	0	0		993	356	0,35851
995	10	5	1	1	1		994	357	0,359155
996	14	1	0	1	0		995	357	0,358794
997	6	6	1	1	1		996	358	0,359438
998	12	12	1	1	1		997	359	0,36008
999	2	16	1	0	0		998	359	0,359719
1000	7	1	1	1	1		999	360	0,36036
1001	15	11	0	1	0		1000	360	0,36
1002					360				

vi) A partir das colunas G e I da tabela anterior, constrói-se o gráfico de linhas que mostra a evolução da frequência relativa para as repetições consideradas



O gráfico mostra a tendência para a estabilização da frequência relativa, à medida que o número de repetições aumenta. A linha vermelha, com ordenada 0,36, mostra que a frequência relativa tem tendência a estabilizar à volta de 0,36.

Considera-se, assim, que **uma estimativa para a probalilidade de a professora ter de pagar o almoço aos alunos é 36%** (Ver Nota).

3.2.2 Sem reposição

Considera-se uma folha idêntica à anterior, mas com uma alteração na geração do 2.º número. Assim, na coluna A gera-se um número entre 1 e 20. Como o número obtido não pode ser novamente selecionado, considera-se na coluna B a geração de um número entre 1 e 19. Conforme o valor agora obtido para este número, podem-se verificar duas situações:

- Se o valor obtido é inferior ao 1.º número, considera-se esse valor para o 2.º número;
- Se o valor obtido for maior ou igual do que o 1.º número, adiciona-se uma unidade ao valor obtido, sendo este o resultado considerado para o 2.º número.

Apresenta-se a seguir a folha de Excel que retrata a situação descrita:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Seleção sem reposição**						**A professora paga o almoço**	
2	=INT(RAND()*20)+1	=INT(RAND()*19)+1	=IF(B2<A2;B2;B2+1)	=IF(A2<13;1;0)	=IF(C2<13;1;0)		=IF(D2*E2=1;1;0)	
3	=INT(RAND()*20)+1	=INT(RAND()*19)+1	=IF(B3<A3;B3;B3+1)	=IF(A3<13;1;0)	=IF(C3<13;1;0)		=IF(D3*E3=1;1;0)	
4	=INT(RAND()*20)+1	=INT(RAND()*19)+1	=IF(B4<A4;B4;B4+1)	=IF(A4<13;1;0)	=IF(C4<13;1;0)		=IF(D4*E4=1;1;0)	
5	=INT(RAND()*20)+1	=INT(RAND()*19)+1	=IF(B5<A5;B5;B5+1)	=IF(A5<13;1;0)	=IF(C5<13;1;0)		=IF(D5*E5=1;1;0)	
6	=INT(RAND()*20)+1	=INT(RAND()*19)+1	=IF(B6<A6;B6;B6+1)	=IF(A6<13;1;0)	=IF(C6<13;1;0)		=IF(D6*E6=1;1;0)	
7	=INT(RAND()*20)+1	=INT(RAND()*19)+1	=IF(B7<A7;B7;B7+1)	=IF(A7<13;1;0)	=IF(C7<13;1;0)		=IF(D7*E7=1;1;0)	
8	=INT(RAND()*20)+1	=INT(RAND()*19)+1	=IF(B8<A8;B8;B8+1)	=IF(A8<13;1;0)	=IF(C8<13;1;0)		=IF(D8*E8=1;1;0)	
9	=INT(RAND()*20)+1	=INT(RAND()*19)+1	=IF(B9<A9;B9;B9+1)	=IF(A9<13;1;0)	=IF(C9<13;1;0)		=IF(D9*E9=1;1;0)	
10	=INT(RAND()*20)+1	=INT(RAND()*19)+1	=IF(B10<A10;B10;B10+1	=IF(A10<13;1;0)	=IF(C10<13;1;0)		=IF(D10*E10=1;1;0)	
11	=INT(RAND()*20)+1	=INT(RAND()*19)+1	=IF(B11<A11;B11;B11+1	=IF(A11<13;1;0)	=IF(C11<13;1;0)		=IF(D11*E11=1;1;0)	

...

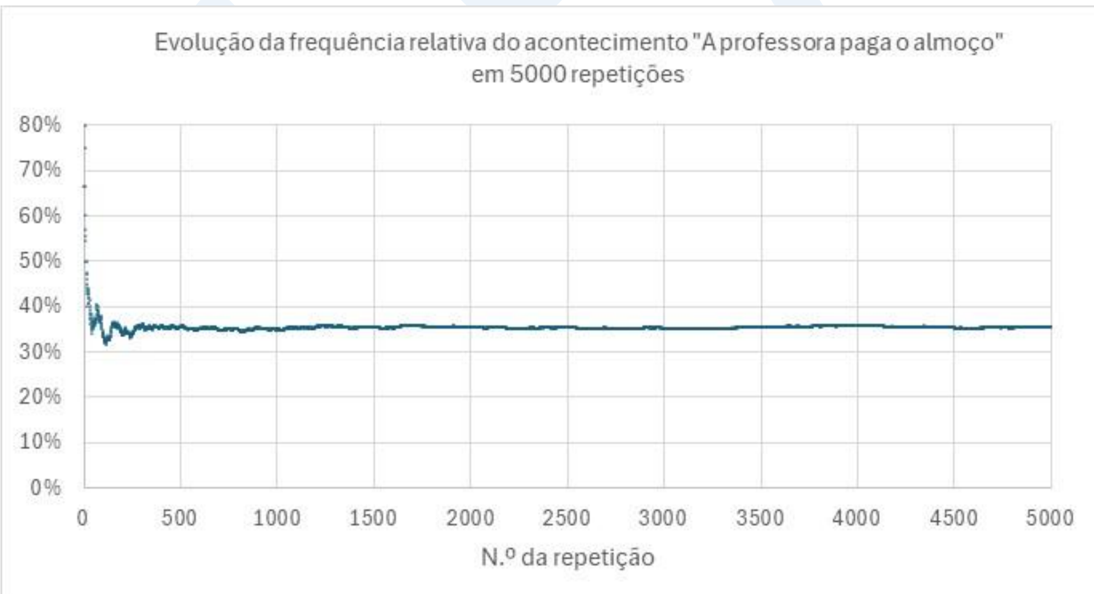
	A	B	C	D	E	F	G
4996	=INT(RAND()*20)+1	=INT(RAND()*19)+1	=IF(B4996<A4996;B499	=IF(A4996<13;1;	=IF(C4996<13;1;0		=IF(D4996*E4996=1;1;0)
4997	=INT(RAND()*20)+1	=INT(RAND()*19)+1	=IF(B4997<A4997;B499	=IF(A4997<13;1;	=IF(C4997<13;1;0		=IF(D4997*E4997=1;1;0)
4998	=INT(RAND()*20)+1	=INT(RAND()*19)+1	=IF(B4998<A4998;B499	=IF(A4998<13;1;	=IF(C4998<13;1;0		=IF(D4998*E4998=1;1;0)
4999	=INT(RAND()*20)+1	=INT(RAND()*19)+1	=IF(B4999<A4999;B499	=IF(A4999<13;1;	=IF(C4999<13;1;0		=IF(D4999*E4999=1;1;0)
5000	=INT(RAND()*20)+1	=INT(RAND()*19)+1	=IF(B5000<A5000;B500	=IF(A5000<13;1;	=IF(C5000<13;1;0		=IF(D5000*E5000=1;1;0)
5001	=INT(RAND()*20)+1	=INT(RAND()*19)+1	=IF(B5001<A5001;B500	=IF(A5001<13;1;	=IF(C5001<13;1;0		=IF(D5001*E5001=1;1;0)
5002							=SUM(G2:G5001)

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Seleção sem reposição 1º num**		**2º num**				**A professora paga o almoço**
2	17	6	6	0	1		0
3	12	11	11	1	1		1
4	17	16	16	0	0		0
5	19	2	2	0	1		0
6	17	13	13	0	0		0
7	2	1	1	1	1		1
8	6	14	15	1	0		0
9	1	15	16	1	0		0
10	4	2	2	1	1		1

...

	A	B	C	D	E	F	G
4993	12	14	15	1	0		0
4994	17	17	18	0	0		0
4995	20	4	4	0	1		0
4996	2	4	5	1	1		1
4997	16	9	9	0	1		0
4998	15	1	1	0	1		0
4999	19	1	1	0	1		0
5000	8	13	14	1	0		0
5001	19	14	14	0	0		0
5002							1824

Fizeram-se 5 000 repetições, que se apresentam no seguinte gráfico, utilizando para a sua construção uma metodologia idêntica à considerada na seleção com reposição:



Como resultado da simulação, obteve-se como **estimativa para a probabilidade de a professora ter de pagar o almoço aos alunos, numa seleção sem reposição, um valor aproximado de 35%.**

Resumindo os resultados a que se chegou anteriormente, tem-se:

	Seleção dos alunos com reposição	Seleção dos alunos sem reposição
Probabilidade de a professora ter de pagar o almoço aos alunos	36%	35%
Estimativa para a **probabilidade** de a professora ter de pagar o almoço	36%	35%

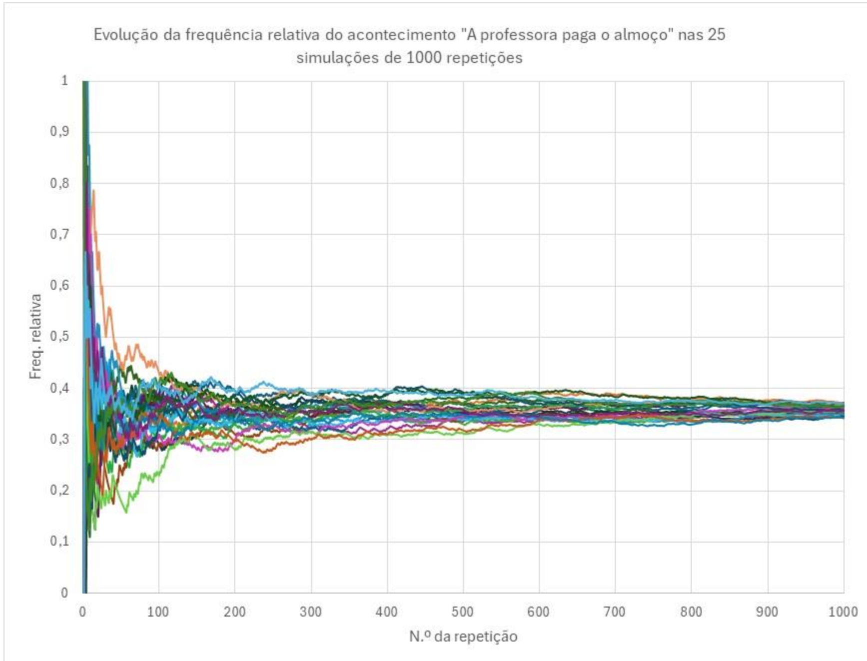
Com uma razoável probabilidade, terão de ser os alunos a pagar o almoço...!!!

Afinal, o raciocínio em que eles se basearam para afirmar que "o almoço estava no papo" não foi correto, pois consideravam alguns acontecimentos igualmente prováveis, quando isso não é verdade. Por exemplo, o acontecimento "o máximo dos 2 números é 9" não é equiprovável a "o máximo dos 2 números é 13", etc..

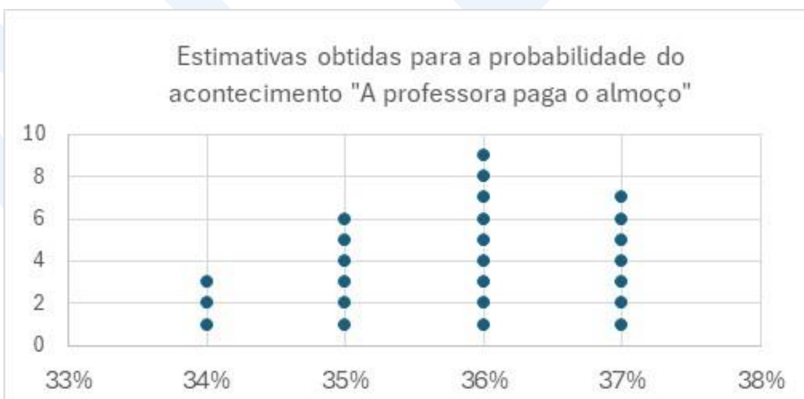
Mas não está tudo perdido... a probabilidade de a professora ter de pagar o almoço não é "muito" pequena, e talvez valha a pena arriscar e aceitar o desafio!

Nota – É importante referir que a aproximação frequencista para a Probabilidade de um acontecimento requer, em teoria, que se faça um "número infinito" de repetições da experiência aleatória, que conduza à realização desse acontecimento, até se verificar a estabilização da frequência relativa. Na prática, costuma-se ficar satisfeito com uma "certa estabilidade", que depende da precisão exigida, considerando-se o valor obtido como **estimativa** da probabilidade pretendida.

Por exemplo, apresenta-se, a seguir, o resultado da realização de 25 simulações, de 1 000 repetições cada uma, idênticas à realizada em 3.2.1, em que se verificou a tendência para a frequência relativa estabilizar em valores aproximados, que variam entre 34% e 37%:



Como se disse, existe uma pequena variação nos valores em que estabilizou a frequência relativa, nas diferentes simulações, tendo-se obtido 25 valores no intervalo [34%, 37%] cuja média é 36%:



Qualquer um dos valores obtidos pode ser considerado uma estimativa para a probabilidade pretendida.

Observação – A função RAND(), tem a caraterística de ser volátil – o valor da função é alterado sempre que a célula que a contém é recalculada, o que pode ser aproveitado para realizar as várias simulações, de uma forma muito simples e rápida, utilizando a seguinte metodologia:

1) Copiar os valores da coluna E, que resultaram da simulação das 1 000 repetições;
2) Colar esses valores, com a função *Paste Special – values*, numa outra coluna, por exemplo a coluna R;
3) Repetir o passo 1) com os novos valores que entretanto foram gerados, devido à volatilidade da função RAND() e colar os valores na coluna S, com o *Paste Special – Values*;
4) Repetir as simulações as vezes que se desejar, que no caso descrito foram 25:

R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL	AM	AN	AO	AP
1ªsim	2ªsim	3ªsim	4ªsim	5ªsim	6ªsim	7ªsim	8ªsim	9ªsim	10ªsim	11ºsim	12ªsim	13ªsim	14ªsim	15ªsim	16ªsim	17ªsim	18ªsim	19ªsim	20ªsim	21ªsim	22ªsim	23ªsim	24ªsim	25^sim
0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0
0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1
0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0

…

5) Proceder como em 3.2.1 para obter a tabela com a evolução da frequência relativa ao longo das repetições, para as várias simulações:

AQ	AR	AS	AT	AU	AV	AW	AX	AY	AZ	BA	BB	BC	BD	BE	BF	BG	BH	BI	BJ	BK	BL	BM	BN	BO
Freq.abs.acum.																								
1ªsim	2ªsim	3ªsim	4ªsim	5ªsim	6ªsim	7ªsim	8ªsim	9ªsim	10ªsin	11ºsin	12ªsin	13ªsin	14ªsin	15ªsin	16ªsin	17ªsin	18ªsin	19ªsin	20ªsin	21ªsin	22ªsin	23ªsin	24ªsin	25ªsim
0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0
0	0	0	1	2	0	2	1	0	1	0	2	2	2	0	1	1	1	1	2	2	2	1	1	1
0	0	1	1	2	1	2	1	0	2	0	3	3	2	1	2	1	2	1	3	2	2	2	1	2
1	1	1	1	2	2	2	2	0	2	1	4	4	3	2	3	2	2	1	3	3	3	3	1	2
1	2	1	2	2	3	2	3	1	2	1	4	5	3	2	4	3	2	1	3	3	3	4	1	3
1	3	1	2	2	3	3	3	2	3	1	5	6	4	2	4	4	2	1	3	4	3	4	1	3
2	3	1	3	2	3	3	3	3	3	1	5	6	5	2	4	5	2	1	3	4	4	4	1	4
2	3	1	3	2	4	3	3	4	4	2	5	7	6	2	4	6	2	2	3	5	4	4	1	4
2	3	1	4	3	4	4	3	5	4	2	6	7	6	3	4	6	2	2	3	5	5	4	2	5
2	4	2	4	3	5	4	3	5	4	2	6	7	7	3	4	7	2	2	3	6	5	5	2	5

…

BQ	BR	BS	BT	BU	BV	BW	BX	BY	BZ	CA	CB	CC	CD	CE	CF	CG	CH	CI	CJ	CK	CL	CM	CN	CO	CP
	Evol. freq.rel.																								
Nº repetição	1ªsim	2ªsim	3ªsim	4ªsim	5ªsim	6ªsim	7ªsim	8ªsim	9ªsim	10ªsim	11ºsim	12ªsim	13ªsim	14ªsim	15ªsim	16ªsim	17ªsim	18ªsim	19ªsim	20ªsim	21ªsim	22ªsim	23ªsim	24ªsim	25ªsim
1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0
2	0	0	0	0,5	1	0	1	0,5	0	0,5	0	1	1	1	0	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1	1	0,5	0,5	0,5
3	0	0	0,333	0,333	0,667	0,333	0,667	0,333	0	0,667	0	1	1	0,667	0,333	0,667	0,333	0,667	0,333	1	0,667	0,667	0,667	0,333	0,667
4	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	0,5	0,5	0,5	0	0,5	0,25	1	1	0,75	0,5	0,75	0,5	0,5	0,25	0,75	0,75	0,75	0,75	0,25	0,5
5	0,2	0,4	0,2	0,4	0,4	0,6	0,4	0,6	0,2	0,4	0,2	0,8	1	0,6	0,4	0,8	0,6	0,4	0,2	0,6	0,6	0,6	0,8	0,2	0,6
6	0,167	0,5	0,167	0,333	0,333	0,5	0,5	0,5	0,333	0,5	0,167	0,833	1	0,667	0,333	0,667	0,667	0,333	0,167	0,5	0,667	0,5	0,667	0,167	0,5
7	0,286	0,429	0,143	0,429	0,286	0,429	0,429	0,429	0,429	0,429	0,143	0,714	0,857	0,714	0,286	0,571	0,714	0,286	0,143	0,429	0,571	0,571	0,571	0,143	0,571
8	0,25	0,375	0,125	0,375	0,25	0,5	0,375	0,375	0,5	0,5	0,25	0,625	0,875	0,75	0,25	0,5	0,75	0,25	0,25	0,375	0,625	0,5	0,5	0,125	0,5
9	0,222	0,333	0,111	0,444	0,333	0,444	0,444	0,333	0,556	0,444	0,222	0,667	0,778	0,667	0,333	0,444	0,667	0,222	0,222	0,333	0,556	0,556	0,444	0,222	0,556
10	0,2	0,4	0,2	0,4	0,3	0,5	0,4	0,3	0,5	0,4	0,2	0,6	0,7	0,7	0,3	0,4	0,7	0,2	0,2	0,3	0,6	0,5	0,5	0,2	0,5
11	0,182	0,364	0,273	0,364	0,364	0,545	0,455	0,273	0,455	0,364	0,182	0,545	0,636	0,727	0,273	0,455	0,636	0,182	0,182	0,273	0,545	0,455	0,545	0,182	0,455
12	0,167	0,417	0,25	0,417	0,333	0,5	0,417	0,25	0,5	0,333	0,167	0,5	0,667	0,75	0,25	0,5	0,583	0,167	0,167	0,333	0,5	0,417	0,5	0,25	0,417
…																									
988	0,358	0,373	0,345	0,345	0,351	0,355	0,345	0,358	0,353	0,363	0,368	0,368	0,35	0,366	0,365	0,345	0,361	0,355	0,359	0,344	0,364	0,343	0,356	0,363	0,371
989	0,359	0,373	0,345	0,346	0,352	0,355	0,345	0,358	0,353	0,363	0,368	0,368	0,35	0,367	0,365	0,345	0,361	0,355	0,36	0,344	0,364	0,344	0,356	0,364	0,371
990	0,36	0,373	0,344	0,345	0,352	0,356	0,344	0,358	0,353	0,364	0,368	0,369	0,349	0,367	0,366	0,344	0,361	0,355	0,36	0,343	0,364	0,344	0,356	0,364	0,371
991	0,359	0,373	0,345	0,345	0,351	0,355	0,345	0,357	0,353	0,363	0,367	0,369	0,349	0,366	0,366	0,344	0,361	0,355	0,36	0,343	0,363	0,344	0,355	0,363	0,37
992	0,359	0,373	0,345	0,345	0,351	0,355	0,345	0,358	0,353	0,364	0,368	0,369	0,35	0,367	0,366	0,344	0,362	0,356	0,36	0,344	0,364	0,344	0,356	0,364	0,371
993	0,359	0,373	0,345	0,345	0,351	0,354	0,344	0,358	0,352	0,364	0,368	0,37	0,35	0,368	0,366	0,344	0,362	0,356	0,36	0,343	0,364	0,344	0,356	0,365	0,371
994	0,359	0,372	0,346	0,345	0,352	0,354	0,344	0,357	0,353	0,364	0,367	0,369	0,351	0,367	0,365	0,344	0,361	0,356	0,359	0,344	0,363	0,344	0,356	0,364	0,371
995	0,359	0,372	0,347	0,346	0,352	0,355	0,345	0,357	0,353	0,364	0,368	0,37	0,351	0,367	0,366	0,344	0,361	0,356	0,359	0,344	0,364	0,344	0,356	0,365	0,371
996	0,358	0,372	0,347	0,346	0,351	0,354	0,345	0,356	0,353	0,363	0,367	0,369	0,35	0,366	0,365	0,343	0,361	0,355	0,358	0,343	0,364	0,343	0,355	0,364	0,37
997	0,358	0,372	0,347	0,347	0,351	0,354	0,346	0,357	0,354	0,363	0,367	0,37	0,35	0,366	0,365	0,343	0,361	0,355	0,358	0,343	0,365	0,344	0,355	0,364	0,37
998	0,358	0,372	0,348	0,347	0,351	0,354	0,347	0,357	0,355	0,363	0,368	0,371	0,35	0,367	0,366	0,343	0,362	0,355	0,358	0,343	0,366	0,344	0,356	0,364	0,37
999	0,357	0,372	0,348	0,346	0,351	0,354	0,346	0,356	0,355	0,362	0,367	0,371	0,349	0,366	0,366	0,342	0,361	0,355	0,358	0,342	0,366	0,343	0,356	0,364	0,369
1000	0,357	0,372	0,349	0,346	0,351	0,354	0,346	0,356	0,355	0,362	0,367	0,371	0,349	0,366	0,366	0,342	0,362	0,356	0,358	0,343	0,367	0,344	0,356	0,364	0,37

6) Os resultados obtidos na tabela anterior permitem a construção do gráfico de linhas com as 25 simulações.