

TarefALEA - Probabilidade

N.º 3 – A troca de presentes entre quatro amigos



Os quatro colegas e amigos Mariana, Manuel, Vera e Pedro, decidiram organizar um lanche nas férias de Natal. Combinaram que cada um compraria um único presente, num valor inferior a 15 euros, que na altura meteriam num saco e depois escolheriam ao acaso¹.

Na véspera do dia escolhido para o encontro, a Mariana estava um pouco incomodada com a combinação feita, pois começou a pensar que correriam o risco de cada um retirar o presente que tinha comprado para oferecer a um dos colegas! Partilhou esta preocupação com os amigos e então decidiram estudar essa situação, que se pode traduzir na questão seguinte.

Questão – Colocam-se num saco os quatro presentes que cada um dos quatro amigos comprou para a troca de presentes, entre eles. De seguida, cada um retira do saco, aleatoriamente, um dos presentes.

Algumas das questões que se pretende investigar, são:

- Qual a probabilidade de todos retirarem o presente que tinham comprado?
- Qual a probabilidade de pelo menos um dos amigos retirar o presente que tinha comprado?
- Em média, quantos amigos retirarão o presente que compraram?

Os quatro amigos decidiram responder às questões colocadas utilizando duas abordagens diferentes para o cálculo da Probabilidade: a interpretação **empírica** ou **frequencista** de Probabilidade e a interpretação **clássica** ou **laplaciana** de Probabilidade. A Mariana e o Manuel iriam proceder à recolha de dados, utilizando a tecnologia, isto é, iriam simular a experiência aleatória que consiste em colocar 4 presentes num saco, seleccioná-los aleatoriamente e registar a ordem pela qual saíam, para utilizarem a

¹ Imagem adaptada de <https://www.istockphoto.com/br/fotos/presente>

abordagem frequencista. A Vera e o Pedro iriam resolver o problema teoricamente, utilizando a regra de Laplace. No fim, comparariam os resultados obtidos.

Em qualquer das duas abordagens, começaram por numerar os presentes de 1 a 4, por ordem alfabética dos nomes, pelo que, se a Mariana retirasse o número 2, retiraria o seu presente, etc. Este procedimento, segundo eles, salvaguardaria o caso de os presentes terem aspecto diferente e quando fossem retirados do saco, poderem ser identificados por apalpação... Assim, agora a questão está em verificar o número de concordâncias obtidas, que pode ir de 0 – nenhum dos amigos receber o seu presente, até 4 – todos os amigos receberam o seu presente, sem contemplar o número 3 (que não se pode verificar).

❖ Abordagem empírica ou frequencista

1. Planeamento para a recolha de dados

Para simular a experiência, uma vez que os presentes estavam numerados de 1 a 4, decidiram gerar 4 números aleatórios² entre 0 e 1, utilizando a função RAND() e depois classificá-los pela ordem, isto é, atribuiriam o número 1 ao menor dos números e o número 4 ao maior dos números. A sequência obtida seria comparada com a sequência 1234, para verificar o número de concordâncias obtidas. Por exemplo, o resultado 2134 significaria que o Pedro e a Vera receberiam os próprios presentes, ou seja, 2 concordâncias, enquanto a sequência 2413 significaria que nenhum receberia o próprio presente, ou seja, 0 concordâncias.

Apresenta-se uma parte da folha de Excel com a visualização das fórmulas utilizadas:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2	=RAND()	=RAND()	=RAND()	=RAND()		=RANK.EQ(A2;\$A2:\$D2;1)	=RANK.EQ(B2;\$A2:\$D2;1)	=RANK.EQ(C2;\$A2:\$D2;1)	=RANK.EQ(D2;\$A2:\$D2;1)
3	=RAND()	=RAND()	=RAND()	=RAND()		=RANK.EQ(A3;\$A3:\$D3;1)	=RANK.EQ(B3;\$A3:\$D3;1)	=RANK.EQ(C3;\$A3:\$D3;1)	=RANK.EQ(D3;\$A3:\$D3;1)
4	=RAND()	=RAND()	=RAND()	=RAND()		=RANK.EQ(A4;\$A4:\$D4;1)	=RANK.EQ(B4;\$A4:\$D4;1)	=RANK.EQ(C4;\$A4:\$D4;1)	=RANK.EQ(D4;\$A4:\$D4;1)
5	=RAND()	=RAND()	=RAND()	=RAND()		=RANK.EQ(A5;\$A5:\$D5;1)	=RANK.EQ(B5;\$A5:\$D5;1)	=RANK.EQ(C5;\$A5:\$D5;1)	=RANK.EQ(D5;\$A5:\$D5;1)
6	=RAND()	=RAND()	=RAND()	=RAND()		=RANK.EQ(A6;\$A6:\$D6;1)	=RANK.EQ(B6;\$A6:\$D6;1)	=RANK.EQ(C6;\$A6:\$D6;1)	=RANK.EQ(D6;\$A6:\$D6;1)
7	=RAND()	=RAND()	=RAND()	=RAND()		=RANK.EQ(A7;\$A7:\$D7;1)	=RANK.EQ(B7;\$A7:\$D7;1)	=RANK.EQ(C7;\$A7:\$D7;1)	=RANK.EQ(D7;\$A7:\$D7;1)

² Mais corretamente, os números são pseudo-aleatórios, já que são gerados por um algoritmo matemático, comportando-se, no entanto, como se fossem aleatórios.

K	L	M	N	O	P
Sequência obtida	1º Concorda	2º Concorda	3º Concorda	4º Concorda	Quantos concordam?
=CONCAT(F2:I2)	=IF(F2=1;1;0)	=IF(G2=2;1;0)	=IF(H2=3;1;0)	=IF(I2=4;1;0)	=SUM(L2:O2)
=CONCAT(F3:I3)	=IF(F3=1;1;0)	=IF(G3=2;1;0)	=IF(H3=3;1;0)	=IF(I3=4;1;0)	=SUM(L3:O3)
=CONCAT(F4:I4)	=IF(F4=1;1;0)	=IF(G4=2;1;0)	=IF(H4=3;1;0)	=IF(I4=4;1;0)	=SUM(L4:O4)
=CONCAT(F5:I5)	=IF(F5=1;1;0)	=IF(G5=2;1;0)	=IF(H5=3;1;0)	=IF(I5=4;1;0)	=SUM(L5:O5)
=CONCAT(F6:I6)	=IF(F6=1;1;0)	=IF(G6=2;1;0)	=IF(H6=3;1;0)	=IF(I6=4;1;0)	=SUM(L6:O6)
=CONCAT(F7:I7)	=IF(F7=1;1;0)	=IF(G7=2;1;0)	=IF(H7=3;1;0)	=IF(I7=4;1;0)	=SUM(L7:O7)
=CONCAT(F8:I8)	=IF(F8=1;1;0)	=IF(G8=2;1;0)	=IF(H8=3;1;0)	=IF(I8=4;1;0)	=SUM(L8:O8)

e sem a visualização das fórmulas:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1											Sequência obtida	1º Concorda	2º Concorda	3º Concorda	4º Concorda	Quantos concordam?
2	0,586504	0,399434	0,152123	0,687288	3	2	1	4			3214	0	1	0	1	2
3	0,699528	0,875064	0,343454	0,702598	2	4	1	3			2413	0	0	0	0	0
4	0,463607	0,123308	0,832944	0,0921	3	2	4	1			3241	0	1	0	0	1
5	0,287992	0,525219	0,295574	0,708866	1	3	2	4			1324	1	0	0	1	2
6	0,7231	0,037539	0,418209	0,042386	4	1	3	2			4132	0	0	1	0	1
7	0,471607	0,194756	0,967946	0,482428	2	1	4	3			2143	0	0	0	0	0

2. Tratamento dos dados

Os dados que interessam são os da coluna P, que apresenta o número de concordâncias obtidas. Como se realizaram 1 000 simulações, obteve-se uma amostra de dimensão 1 000, cujos dados foram organizados na seguinte tabela de frequências:

N.º concordâncias	Freq. abs.	Freq. rel.	Freq. rel. %
0	369	0,369	36,9%
1	328	0,328	32,8%
2	262	0,262	26,2%
3	0	0	0,0%
4	41	0,041	4,1%
	1000	1	100%

Repare-se que não é possível haver 3 concordâncias, pelo que os valores possíveis para o número de concordâncias são 0, 1, 2 e 4.

Utilizando a fórmula para o cálculo da média, para dados agrupados, obtém-se

$$\text{Média} = 0 \times 0,369 + 1 \times 0,328 + 2 \times 0,262 + 4 \times 0,041 = 1,016$$

donde, em média, um dos amigos receberá o presente que comprou.

Apresenta-se a evolução da frequência relativa de todos os amigos receberem o presente que tinham comprado



e de pelo menos um dos amigos receber o presente que comprou.



3. Conclusão

Da tabela anterior, podem-se retirar algumas conclusões, tais como:

- O resultado mais frequente é nenhum dos amigos receber o presente que comprou, com uma estimativa para a probabilidade de cerca de 37%;
- O resultado menos frequente é todos receberem os seus próprios presentes, com uma estimativa para a probabilidade de aproximadamente 4%;
- Uma estimativa para a probabilidade de, pelo menos um amigo, receber o seu próprio presente é, aproximadamente, 63%;
- Em média, só um dos amigos receberá o seu próprio presente.

❖ Abordagem clássica ou de Laplace

Estamos numa situação em que todos os resultados do espaço de resultados associado à experiência aleatória, que consiste em considerar a sequência obtida selecionando aleatoriamente os 4 números de 1 a 4, são igualmente possíveis, pelo que é possível aplicar a regra de Laplace.

1. Espaço de resultados

O espaço de resultados é constituído pelos resultados que se obtêm pela permutação dos dígitos da sequência 1234, num total de $4! = 24$, como se apresentam a seguir:

1234	1243	1324	1342	1423	1432
2134	2143	2314	2341	2413	2431
3124	3142	3214	3241	3412	3421
4123	4132	4213	4231	4312	4321

Legenda:

4 concordâncias
2 concordâncias
1 concordância
0 concordâncias

Nº de concordâncias	0	1	2	4
Frequência absoluta	9	8	6	1

2. Cálculo das probabilidades

Uma vez que os resultados do espaço de resultados são todos igualmente possíveis, vem para as probabilidades do número de concordâncias:

Nº de conconcordâncias	0	1	2	4
Probabilidade	9/24	8/24	6/24	1/24

ou seja, temos a seguinte função massa de probabilidade para a *variável aleatória* que representa o *número de concordâncias*:

Nº de conconcordâncias	0	1	2	4
Probabilidade	37,5%	33,3%	25%	4,2%

A expressão para o cálculo do valor médio é idêntica à expressão utilizada para o cálculo da média para dados agrupados, em que se substitui o valor da frequência relativa com que se observou determinado dado, pela probabilidade de observar esse valor da variável aleatória:

$$\text{Valor médio} = 0 \times 0,375 + 1 \times 0,333 + 2 \times 0,25 + 4 \times 0,0416 = 1$$

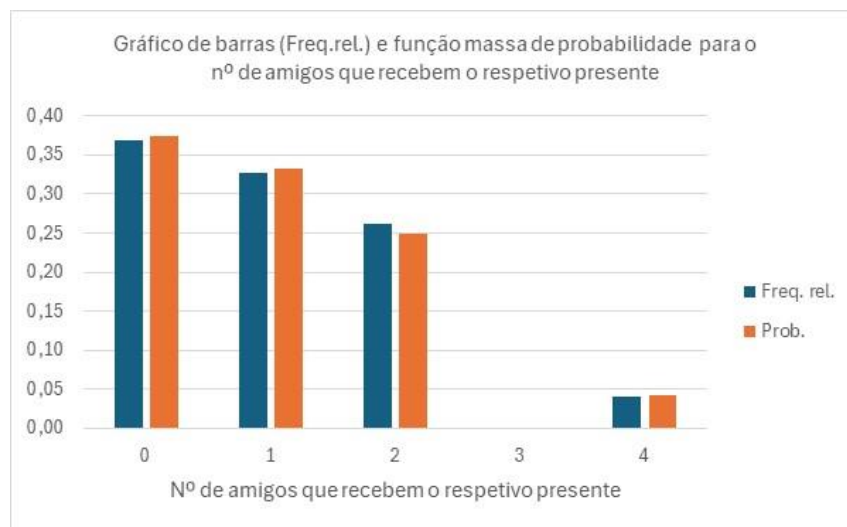
3. Conclusão

A partir do modelo de probabilidade obtido para o número de concordâncias, ou seja, para a variável aleatória que representa o número de amigos que receberiam o próprio presente, eis algumas conclusões que se podem retirar:

- A probabilidade de nenhum receber o próprio presente é 37,5%;
- O risco de todos receberem o próprio presente é de cerca de 4%;
- A probabilidade de, pelo menos um amigo, ficar com o seu presente, é aproximadamente de 62,5%;
- Em média, só um dos amigos receberia o presente que comprou.

A abordagem frequencista forneceu boas estimativas para as probalibidades?

A partir dos resultados obtidos anteriormente, construiu-se a seguinte representação gráfica, que apresenta o gráfico de barras e a função massa de probabilidade para o número de concordâncias, ou seja para 0, 1, 2 ou os 4 amigos receberem os respetivos presentes:



Como se verifica, as estimativas obtidas por simulação, para as probabilidades dos valores 0, 1, 2 ou 4 assumidos pela variável aleatória que representa o número de amigos que receberam os respetivos presentes, podem ser consideradas bastante razoáveis.

Com os resultados anteriores, também se verifica que a média da amostra obtida por simulação é uma boa estimativa do valor médio da variável aleatória que representa o número de amigos receberem os respetivos presentes, uma vez que se obteve 1, quer para a média, quer para o valor médio.