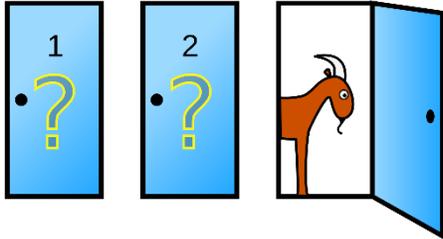


TarefALEA - Probabilidade

N.º 4 – O concurso das três portas



Num concurso muito popular na televisão americana, nos finais dos anos 80, o concorrente é colocado perante três portas, que escondem um Carro e duas Cabras. É-lhe pedido que escolha uma das portas. Então, o apresentador, que sabe onde está o Carro, abre uma das duas portas não escolhidas, mostra que tem uma Cabra

e pergunta ao concorrente se quer **manter** a porta escolhida ou se **quer trocar** de porta¹.

Este célebre concurso de estratégia levantou muita polémica, quando Marilyn vos Savant, que mantinha a coluna “Ask Marilyn”, numa revista americana, em que respondia sobre dúvidas de Matemática e Ciências, foi questionada por um leitor sobre “o que fazer”:

- ✓ manter a porta escolhida ou
- ✓ trocar de porta?

A resposta que Marilyn deu ao leitor foi que devia **trocar** de porta, pois assim aumentaria para o dobro a probabilidade de ganhar o Carro!

Marilyn, que era conhecida por ter um QI muito alto, foi muito mal tratada, nomeadamente por matemáticos e estatísticos, que exigiam que se retratasse, argumentando que não há qualquer vantagem em trocar, já que temos agora apenas duas portas e o carro tanto pode estar atrás de uma como da outra, pelo que a probabilidade seria igual! Mas afinal Marilyn estava certa! Vamos ver que assim é?

Questão

Depois de o concorrente selecionar uma Porta e o apresentador abrir uma das outras Portas e mostrar que tem uma Cabra, qual a probabilidade de o concorrente ganhar o Carro se **trocar** de Porta?

¹ Imagem retirada de https://pt.wikipedia.org/wiki/Problema_de_Monty_Hall#/media/Ficheiro:Monty_open_door.svg

Esta questão pode ser respondida utilizando a definição **clássica** de Probabilidade e o conceito de probabilidade condicional ou condicionada a que se dará o nome de abordagem **teórica**, ou utilizando a abordagem **empírica** ou **frequencista**, para estimar a probabilidade.

❖ Abordagem teórica

Considerem-se os seguintes acontecimentos:

- P1 – o carro está na Porta 1
- P2 - o carro está na Porta 2
- P3 - o carro está na Porta 3

Suponha-se que o concorrente **escolhe a Porta 1** (o raciocínio seria idêntico para outra porta) e que o apresentador **abre a Porta 3**. O apresentador sabe onde está o carro, pelo que abre uma porta que não o tenha.

Fazendo um ponto da situação,

O que se sabe

- Sabe-se que o concorrente abriu a porta 1;
- Sabe-se que o apresentador abriu a porta 3;

O que se pretende:

- Pretende-se saber qual probabilidade de o concorrente ganhar se **trocar** de porta, ou seja, pretende-se saber qual a probabilidade de o carro estar na Porta 2, *sabendo que* o apresentador abriu a Porta 3, ou, na notação da probabilidade condicionada, $P(P2|O \text{ apresentador abriu a Porta 3}) = ?$

Considerem-se os seguintes resultados preliminares:

$$P(P1) = P(P2) = P(P3) = \frac{1}{3}$$

pois, à partida, o carro pode estar em qualquer porta;

$$P(O \text{ apresentador abrir a Porta 3}|P1) = \frac{1}{2},$$

uma vez que o apresentador tem de escolher entre a Porta 2 e a Porta 3, pois ambas têm Cabra;

$$P(O \text{ apresentador abrir a Porta 3}|P2) = 1,$$

já que o Carro está na Porta 2;

$$P(O \text{ apresentador abrir a Porta 3}|P3) = 0,$$

já que se o Carro está na Porta 3, o apresentador não a vai abrir.

Pela definição de probabilidade condicionada, vem para a probabilidade que se pretende

$$\begin{aligned} P(P2|O \text{ apresentador abriu a Porta 3}) &= \frac{P(P2 \text{ e o apresentador abriu a Porta 3})}{P(O \text{ apresentador abriu a Porta 3})} \\ &= \frac{P(O \text{ apresentador abriu a Porta 3}|P2)P(P2)}{P(O \text{ apresentador abriu a Porta 3})} \\ &= \frac{\frac{1}{3}}{P(O \text{ apresentador abriu a Porta 3})} \end{aligned} \quad (1)$$

Como os acontecimentos P1, P2 e P3 são mutuamente exclusivos e a sua união forma o espaço de resultados (só há 3 possibilidades de escolher uma porta), e são conhecidas as probabilidades de o acontecimento “O apresentador abriu a Porta 3” condicionadas aos acontecimentos P1, P2 e P3, vem

$$P(O \text{ apresentador abriu a Porta 3}) = P(O \text{ apresentador abriu a Porta 3}|P1) P(P1) + P(O \text{ apresentador abriu a Porta 3}|P2) P(P2) + P(O \text{ apresentador abriu a Porta 3}|P3) P(P3)$$

$$P(O \text{ apresentador abriu a Porta 3}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

De (1), vem

$$P(P2|O \text{ apresentador abriu a Porta 3}) = \frac{2}{3}$$

ou seja,

- a probabilidade de o concorrente ganhar o Carro, se **trocar** de porta, é cerca de 67%.

E se o concorrente não tivesse trocado de porta? Qual a probabilidade de ganhar o Carro?

$$\begin{aligned} P(P1|O \text{ apresentador abriu a Porta 3}) &= \frac{P(P1)P(O \text{ apresentador abriu a Porta 3}|P1)}{P(O \text{ apresentador abriu a Porta 3})} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}, \text{ donde} \end{aligned}$$

$$P(P1|O \text{ apresentador abriu a Porta 3}) = \frac{1}{3}$$

ou seja,

- a probabilidade do concorrente ganhar o Carro, se decidir **manter** a porta, é aproximadamente 33%.

A Marilyn tinha razão! Trocar de porta aumenta para o dobro a probabilidade de ganhar o carro.

Ver Anexo – Árvore de probabilidades.

❖ Abordagem empírica

Para simular o concurso, como descrito inicialmente, pode-se utilizar a seguinte metodologia, considerando uma folha de cálculo, como o Excel:

1. Na coluna A, utiliza-se a função RAND(), que devolve um número aleatório² entre 0 e 1. Como existem 3 portas, a probabilidade de escolher a porta com o Carro é 1/3, pelo que se vai admitir que o concorrente escolheu essa porta se o valor devolvido pela função RAND() for inferior a 1/3;
2. Nas colunas B e C, testa-se o que acontece ao concorrente se ele decidir manter a porta ou trocar de porta. Se em 1. o valor gerado for inferior a 1/3, quando ele trocar de porta ficará com a Cabra, mas, em compensação, ficará com o Carro em todos os outros casos (se ele tiver escolhido inicialmente a Cabra, a porta que resta terá obrigatoriamente o Carro, pois o apresentador encarregou-se de eliminar a outra porta que também tem Cabra);
3. Consideram-se ainda as colunas E e F, que são úteis para contabilizar o número de vezes que o concorrente ganhou o Carro, quer não trocando, quer trocando a porta inicialmente escolhida:

	A	B	C	D	E	F
1		O que ganha não trocando	O que ganha trocando		Ganhou o carro não trocando?	Ganhou o carro trocando?
2	=RAND()	=IF(A2<1/3;"Carro";"Cabra")	=IF(A2<1/3;"Cabra";"Carro")	=IF(B2="Carro";1;0)	=IF(C2="Carro";1;0)	
3	=RAND()	=IF(A3<1/3;"Carro";"Cabra")	=IF(A3<1/3;"Cabra";"Carro")	=IF(B3="Carro";1;0)	=IF(C3="Carro";1;0)	
4	=RAND()	=IF(A4<1/3;"Carro";"Cabra")	=IF(A4<1/3;"Cabra";"Carro")	=IF(B4="Carro";1;0)	=IF(C4="Carro";1;0)	
5	=RAND()	=IF(A5<1/3;"Carro";"Cabra")	=IF(A5<1/3;"Cabra";"Carro")	=IF(B5="Carro";1;0)	=IF(C5="Carro";1;0)	
6	=RAND()	=IF(A6<1/3;"Carro";"Cabra")	=IF(A6<1/3;"Cabra";"Carro")	=IF(B6="Carro";1;0)	=IF(C6="Carro";1;0)	
7	=RAND()	=IF(A7<1/3;"Carro";"Cabra")	=IF(A7<1/3;"Cabra";"Carro")	=IF(B7="Carro";1;0)	=IF(C7="Carro";1;0)	
8	=RAND()	=IF(A8<1/3;"Carro";"Cabra")	=IF(A8<1/3;"Cabra";"Carro")	=IF(B8="Carro";1;0)	=IF(C8="Carro";1;0)	
9	=RAND()	=IF(A9<1/3;"Carro";"Cabra")	=IF(A9<1/3;"Cabra";"Carro")	=IF(B9="Carro";1;0)	=IF(C9="Carro";1;0)	
10	=RAND()	=IF(A10<1/3;"Carro";"Cabra")	=IF(A10<1/3;"Cabra";"Carro")	=IF(B10="Carro";1;0)	=IF(C10="Carro";1;0)	
11	=RAND()	=IF(A11<1/3;"Carro";"Cabra")	=IF(A11<1/3;"Cabra";"Carro")	=IF(B11="Carro";1;0)	=IF(C11="Carro";1;0)	

...

² Mais corretamente, os números são pseudo-aleatórios, já que são gerados por um algoritmo matemático, comportando-se, no entanto, como se fossem aleatórios.

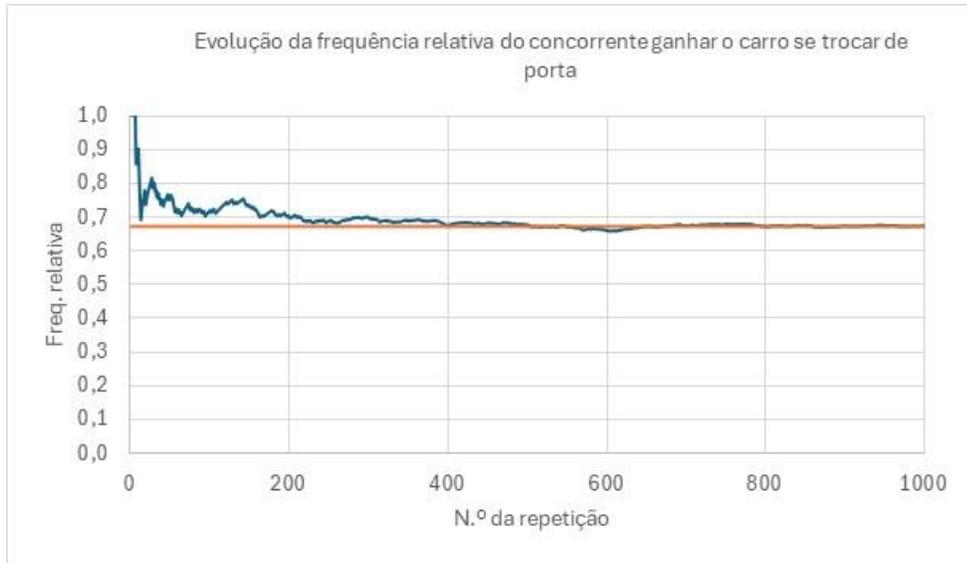
	A	B	C	D	E	F
995	=RAND()	=IF(A995<1/3;"Carro";"Cabra")	=IF(A995<1/3;"Cabra";"Carro")		=IF(B995="Carro";1;0)	=IF(C995="Carro";1;0)
996	=RAND()	=IF(A996<1/3;"Carro";"Cabra")	=IF(A996<1/3;"Cabra";"Carro")		=IF(B996="Carro";1;0)	=IF(C996="Carro";1;0)
997	=RAND()	=IF(A997<1/3;"Carro";"Cabra")	=IF(A997<1/3;"Cabra";"Carro")		=IF(B997="Carro";1;0)	=IF(C997="Carro";1;0)
998	=RAND()	=IF(A998<1/3;"Carro";"Cabra")	=IF(A998<1/3;"Cabra";"Carro")		=IF(B998="Carro";1;0)	=IF(C998="Carro";1;0)
999	=RAND()	=IF(A999<1/3;"Carro";"Cabra")	=IF(A999<1/3;"Cabra";"Carro")		=IF(B999="Carro";1;0)	=IF(C999="Carro";1;0)
1000	=RAND()	=IF(A1000<1/3;"Carro";"Cabra")	=IF(A1000<1/3;"Cabra";"Carro")		=IF(B1000="Carro";1;0)	=IF(C1000="Carro";1;0)
1001	=RAND()	=IF(A1001<1/3;"Carro";"Cabra")	=IF(A1001<1/3;"Cabra";"Carro")		=IF(B1001="Carro";1;0)	=IF(C1001="Carro";1;0)
1002					=SUM(E2:E1001)	=SUM(F2:F1001)

4. O resultado de 1 000 repetições conduziu aos seguintes resultados:

	A	B	C	D	E	F
1		O que ganha não trocando	O que ganha trocando		Ganhou o carro não trocando?	Ganhou o carro trocando?
2	0,449582	Cabra	Carro		0	1
3	0,7202789	Cabra	Carro		0	1
4	0,6873123	Cabra	Carro		0	1
5	0,4388282	Cabra	Carro		0	1
6	0,3411679	Cabra	Carro		0	1
7	0,9824327	Cabra	Carro		0	1
8	0,0585974	Carro	Cabra		1	0
9	0,5221708	Cabra	Carro		0	1
10	0,6922608	Cabra	Carro		0	1
11	0,3860343	Cabra	Carro		0	1
...						
	A	B	C	D	E	F
995	0,4174232	Cabra	Carro		0	1
996	0,5056778	Cabra	Carro		0	1
997	0,5757914	Cabra	Carro		0	1
998	0,5551742	Cabra	Carro		0	1
999	0,6584496	Cabra	Carro		0	1
1000	0,2589793	Carro	Cabra		1	0
1001	0,0173507	Carro	Cabra		1	0
1002					327	673

5. A soma dos valores obtidos nas colunas E e F dá o número de vezes que o concorrente ganhou o Carro, quer não trocando, quer trocando de porta, donde se conclui que uma estimativa para a probabilidade de o concorrente ganhar o Carro, não trocando ou trocando de porta é, respetivamente, 33% e 67%!

O gráfico seguinte apresenta a evolução da frequência relativa do concorrente ganhar o carro, se trocar de porta:



A linha a vermelho, de ordenada 0,67, mostra que a frequência relativa estabiliza junto dessa linha.

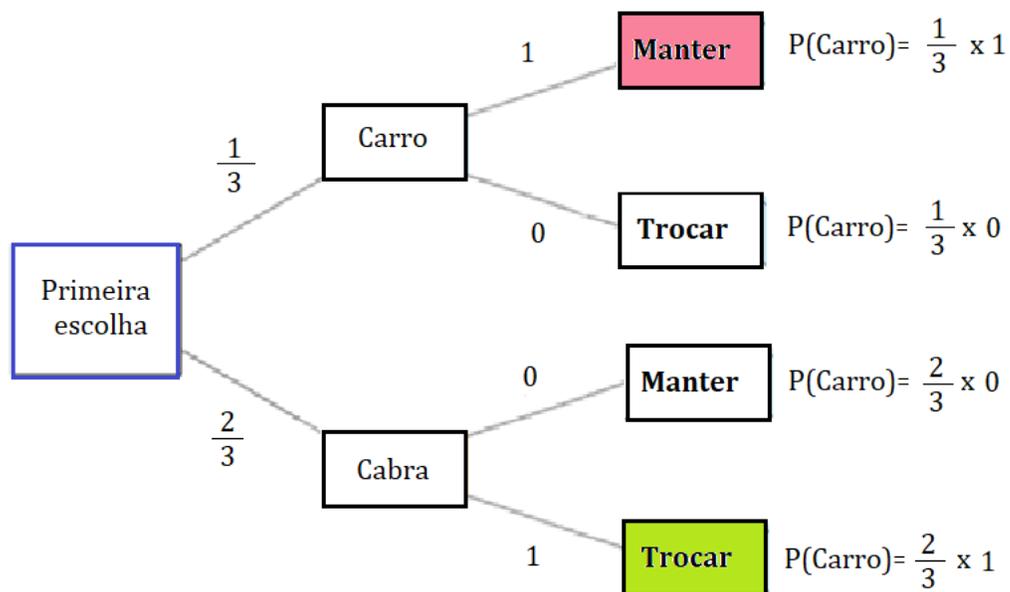
Comparação dos resultados empíricos com os resultados teóricos:

Resumindo os resultados obtidos anteriormente, temos, para a probabilidade de o concorrente ganhar o Carro, **trocando** de porta:

	Abordagem teórica	Abordagem empírica
Probabilidade	67%	
Estimativa para a probabilidade		67%

Anexo – Árvore de probabilidades

Por vezes, é conveniente a utilização de uma **árvore de probabilidades** para organizar a informação disponível sobre os acontecimentos em cadeia, como se apresenta a seguir:



Do diagrama anterior, conclui-se que a probabilidade de ganhar o Carro é $\frac{1}{3}$, se decidir Manter a porta da primeira escolha, ou $\frac{2}{3}$, se decidir Trocar a porta.