

TarefALEA - Probabilidade

N.º 5 – Os Cookies com pepitas de chocolate¹



A Maria gosta muito de fazer umas bolachinhas, tipo Cookies, que embala em pacotes de 6, para oferecer aos colegas no Natal. ²

A Maria “garante” que todos os Cookies têm pepitas, pois, no seu processo de fabrico, a cada pedaço de massa para 6 Cookies junta 20 pepitas que se distribuem (aleatoriamente) por esse pedaço de massa, que é a seguir dividido em 6 partes iguais, para fazer os 6 Cookies. A garantia da Maria baseia-se no facto de que, em média, cabe a cada Cookie mais de 3 pepitas!

Será que a Maria tem razão, ao garantir que o seu processo de fabrico não deixa Cookies sem pepitas?

Formalização da questão

Qual a probabilidade de encontrar, numa embalagem de 6 Cookies, pelo menos um Cookie sem pepitas?

Para responder à questão anterior, poder-se-ia pedir à Maria para fazer muitas e muitas embalagens de Cookies e registar o número das embalagens onde há Cookies sem pepitas! A **frequência relativa** obtida para o número de embalagens com Cookies sem pepitas fornece uma *estimativa* para a probabilidade pretendida. No entanto, não parece razoável fazer este pedido à Maria! Mas não há problema, pois, para recolher os dados necessários, pode-se **simular** o fenómeno aleatório que consiste em distribuir, aleatoriamente, cada uma das 20 pepitas por 6 Cookies.

Planeamento e recolha de dados

O planeamento para a recolha de dados foi discutido na turma, tendo-se decidido utilizar 6 pedaços de papel, um dado, e proceder da seguinte forma:

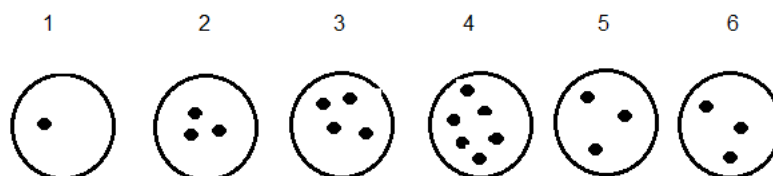
- 1- Atribuir a cada pedaço de papel, que representa um Cookie, um número de 1 a 6;

¹ Adaptado de **Statistics and Data Science for Teachers**, Anna Bargagliotti & Christine Franklin, *American Statistical Association*, 2021, pag. 148.

² Imagem adaptada de <https://www.istockphoto.com/pt/search/more-like-this/1709721394?assettype=image>.

- 2- Lançar o dado e atribuir uma pepita ao Cookie com o número de pintas obtidas;
- 3- Repetir o processo 20 vezes.

Para recolher os dados necessários, cada aluno da turma utiliza o procedimento anterior para obter a distribuição das 20 pepitas pelos 6 Cookies. Por exemplo, um dos alunos obteve a seguinte distribuição:



Na representação anterior, verifica-se que todos os Cookies foram contemplados com pepitas. O processo repete-se com todos os alunos a lançarem o dado 20 vezes e a registarem os resultados obtidos.

O resultado da simulação dos 25 alunos da turma apresenta-se na seguinte tabela:

N.º aluno	N.º do lançamento																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	4	3	2	1	6	5	4	3	6	6	4	4	2	6	2	5	2	1	4	2
2	4	3	5	1	5	1	4	5	4	1	6	4	5	5	3	3	4	5	4	1
3	3	4	4	2	6	5	2	1	3	6	5	6	2	5	2	5	6	4	4	3
4	1	4	3	4	3	6	6	2	2	1	1	4	2	3	4	3	2	1	1	5
5	5	3	3	5	2	3	1	1	6	4	5	3	3	2	6	6	1	5	5	6
6	6	2	2	3	4	4	3	3	2	4	6	1	5	2	2	5	6	6	4	4
7	2	5	5	4	2	1	5	1	5	6	4	1	1	6	5	3	4	1	3	2
8	3	1	6	1	6	6	4	5	4	3	5	1	3	4	6	5	6	5	1	1
9	1	4	5	3	2	3	4	5	4	1	4	6	1	2	2	3	4	6	6	1
10	5	1	6	3	1	4	3	1	6	2	4	5	1	3	2	4	6	4	3	5
11	5	4	3	1	3	1	4	3	6	6	3	4	2	1	1	4	5	5	4	3
12	6	6	2	5	5	1	3	4	6	4	5	6	5	2	6	2	4	2	4	5
13	2	3	1	2	4	2	6	1	4	2	2	5	3	2	1	3	5	1	6	2
14	3	5	3	6	2	1	3	2	5	5	6	1	2	4	1	4	2	1	3	2
15	6	5	3	3	5	1	4	3	3	1	5	6	1	5	5	2	4	6	4	3
16	4	3	4	1	4	3	5	3	2	3	6	6	5	1	3	2	2	6	6	2
17	1	5	1	3	3	6	4	2	1	2	4	2	2	5	4	6	6	6	1	2
18	5	4	6	1	6	4	5	5	4	2	5	2	3	3	5	3	2	3	4	2
19	5	1	1	3	6	2	3	5	1	2	2	3	4	6	1	4	5	3	4	4
20	4	2	2	3	3	4	1	6	5	2	6	6	6	1	3	1	6	2	5	5
21	2	6	3	5	5	5	6	4	5	3	2	1	4	6	6	4	4	3	1	1
22	5	3	4	3	3	5	6	5	6	3	2	5	4	1	2	4	5	2	4	4
23	1	4	1	3	2	5	1	6	6	3	1	1	5	4	6	4	6	5	1	4
24	1	5	4	5	6	6	1	4	5	4	1	3	4	5	6	4	2	3	6	4

25 5 5 3 1 2 5 3 4 3 1 5 1 6 2 2 5 6 2 1 6

Da tabela anterior, obtém-se a seguinte distribuição das pepitas pelos Cookies:

N.º do aluno	N.º do Cookie						Resultado
	1	2	3	4	5	6	
1	2	5	2	5	2	4	Todos têm pepitas
2	4	0	3	6	6	1	Cookie sem pepitas
3	1	4	3	4	4	4	Todos têm pepitas
4	5	4	4	4	1	2	Todos têm pepitas
5	3	2	5	1	5	4	Todos têm pepitas
6	1	5	3	5	2	4	Todos têm pepitas
7	5	3	2	3	5	2	Todos têm pepitas
8	5	0	3	3	4	5	Cookie sem pepitas
9	4	3	3	5	2	3	Todos têm pepitas
10	4	2	4	4	3	3	Todos têm pepitas
11	4	1	5	5	3	2	Todos têm pepitas
12	1	4	1	4	5	5	Todos têm pepitas
13	4	7	3	2	2	2	Todos têm pepitas
14	4	5	4	2	3	2	Todos têm pepitas
15	3	1	5	3	5	3	Todos têm pepitas
16	2	4	5	3	2	4	Todos têm pepitas
17	4	5	2	3	2	4	Todos têm pepitas
18	1	4	4	4	5	2	Todos têm pepitas
19	4	3	4	4	3	2	Todos têm pepitas
20	3	4	3	2	3	5	Todos têm pepitas
21	3	2	3	4	4	4	Todos têm pepitas
22	1	3	4	5	5	2	Todos têm pepitas
23	6	1	2	4	3	4	Todos têm pepitas
24	3	1	2	6	4	4	Todos têm pepitas
25	4	4	3	1	5	3	Todos têm pepitas

Das 25 simulações anteriores, verifica-se que a frequência relativa de haver Cookies sem pepitas é $2/25$, ou seja 8%. Este valor pode ser considerado como uma estimativa para a probabilidade de, numa embalagem, se encontrar um Cookie sem pepitas (nas simulações realizadas, só 2 embalagens tinham um Cookie sem pepitas). No entanto, esta frequência relativa não pode ser considerada uma boa estimativa para a probabilidade pretendida, já que o número de repetições realizadas foi muito pequeno e são necessárias muitas e muitas repetições. Assim, passa-se a uma segunda fase do processo de simulação, em que se vai utilizar a tecnologia.

Utilização do Excel para simular a distribuição das 20 pepitas por 6 Cookies

Um processo possível pode ser o que se descreve a seguir:

1. Numa folha de Excel, nas colunas de A a T, gerar 20 números aleatórios³ entre 1 e 6, para simular o lançamento de um dado, 20 vezes:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	Número do lançamento																			
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3	=INT(RAND()*6)+1	=INT(RAND()*6)+1	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=INT(RAND()*6)+1
4	=INT(RAND()*6)+1	=INT(RAND()*6)+1	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=INT(RAND()*6)+1
5	=INT(RAND()*6)+1	=INT(RAND()*6)+1	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=INT(RAND()*6)+1
6	=INT(RAND()*6)+1	=INT(RAND()*6)+1	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=INT(RAND()*6)+1
7	=INT(RAND()*6)+1	=INT(RAND()*6)+1	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=INT(RAND()*6)+1
8	=INT(RAND()*6)+1	=INT(RAND()*6)+1	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=INT(RAND()*6)+1
9	=INT(RAND()*6)+1	=INT(RAND()*6)+1	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=INT(RAND()*6)+1
10	=INT(RAND()*6)+1	=INT(RAND()*6)+1	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=INT(RAND()*6)+1
11	=INT(RAND()*6)+1	=INT(RAND()*6)+1	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=INT(RAND()*6)+1
12	=INT(RAND()*6)+1	=INT(RAND()*6)+1	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=INT(RAND()*6)+1
13	=INT(RAND()*6)+1	=INT(RAND()*6)+1	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=INT(RAND()*6)+1
14	=INT(RAND()*6)+1	=INT(RAND()*6)+1	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=INT(RAND()*6)+1
15	=INT(RAND()*6)+1	=INT(RAND()*6)+1	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=INT(RAND()*6)+1
16	=INT(RAND()*6)+1	=INT(RAND()*6)+1	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=INT(RAND()*6)+1

2. Em 6 outras colunas da folha de cálculo, por exemplo as colunas V, X, ..., AA, contabilizar o número de vezes que se verificou o 1, 2, ...,6, que é equivalente a saber quantas pepitas calharam ao Cookie1, Cookie2, ..., Cookie6;

³ Mais corretamente, os números são pseudo-aleatórios, já que são gerados por um algoritmo matemático, comportando-se, no entanto, como se fossem aleatórios.

V	W	X	Y	Z	AA
Quantas vezes se verificou o					
1?	2?	3?	4?	5?	6?
=COUNTIF(\$A3:\$T3;"1")	=COUN	=COUN	=COUN	=COUN	=COUNTIF(\$A3:\$T3;"6")
=COUNTIF(\$A4:\$T4;"1")	=COUN	=COUN	=COUN	=COUN	=COUNTIF(\$A4:\$T4;"6")
=COUNTIF(\$A5:\$T5;"1")	=COUN	=COUN	=COUN	=COUN	=COUNTIF(\$A5:\$T5;"6")
=COUNTIF(\$A6:\$T6;"1")	=COUN	=COUN	=COUN	=COUN	=COUNTIF(\$A6:\$T6;"6")
=COUNTIF(\$A7:\$T7;"1")	=COUN	=COUN	=COUN	=COUN	=COUNTIF(\$A7:\$T7;"6")
=COUNTIF(\$A8:\$T8;"1")	=COUN	=COUN	=COUN	=COUN	=COUNTIF(\$A8:\$T8;"6")
=COUNTIF(\$A9:\$T9;"1")	=COUN	=COUN	=COUN	=COUN	=COUNTIF(\$A9:\$T9;"6")
=COUNTIF(\$A10:\$T10;"1")	=COUN	=COUN	=COUN	=COUN	=COUNTIF(\$A10:\$T10;"6")
=COUNTIF(\$A11:\$T11;"1")	=COUN	=COUN	=COUN	=COUN	=COUNTIF(\$A11:\$T11;"6")
=COUNTIF(\$A12:\$T12;"1")	=COUN	=COUN	=COUN	=COUN	=COUNTIF(\$A12:\$T12;"6")
=COUNTIF(\$A13:\$T13;"1")	=COUN	=COUN	=COUN	=COUN	=COUNTIF(\$A13:\$T13;"6")
=COUNTIF(\$A14:\$T14;"1")	=COUN	=COUN	=COUN	=COUN	=COUNTIF(\$A14:\$T14;"6")
=COUNTIF(\$A15:\$T15;"1")	=COUN	=COUN	=COUN	=COUN	=COUNTIF(\$A15:\$T15;"6")
=COUNTIF(\$A16:\$T16;"1")	=COUN	=COUN	=COUN	=COUN	=COUNTIF(\$A16:\$T16;"6")

3. Numa outra coluna da folha de cálculo, a coluna AC, contabilizar quantos Cookies não receberam pepitas; adicionalmente, nas duas colunas seguintes, contabilizar, para cada remessa de 6 Cookies, se houve um ou dois Cookies que não receberam pepitas (não se verificou a situação de 3 Cookies não receberem pepitas, ou seja, não se verificou a situação de, nos resultados do lançamento do dado 20 vezes, se verificarem menos de 4 faces diferentes);

AC	AD	AE
Quantas vezes houve Cookies sem pepitas?	1 Cookie sem pepitas	2 Cookies sem pepitas
=COUNTIF(\$V3:\$AA3;"0")	=IF(AC3=1;1;0)	=IF(AC3=2;1;0)
=COUNTIF(\$V4:\$AA4;"0")	=IF(AC4=1;1;0)	=IF(AC4=2;1;0)
=COUNTIF(\$V5:\$AA5;"0")	=IF(AC5=1;1;0)	=IF(AC5=2;1;0)
=COUNTIF(\$V6:\$AA6;"0")	=IF(AC6=1;1;0)	=IF(AC6=2;1;0)
=COUNTIF(\$V7:\$AA7;"0")	=IF(AC7=1;1;0)	=IF(AC7=2;1;0)
=COUNTIF(\$V8:\$AA8;"0")	=IF(AC8=1;1;0)	=IF(AC8=2;1;0)
=COUNTIF(\$V9:\$AA9;"0")	=IF(AC9=1;1;0)	=IF(AC9=2;1;0)
=COUNTIF(\$V10:\$AA10;"0")	=IF(AC10=1;1;0)	=IF(AC10=2;1;0)
=COUNTIF(\$V11:\$AA11;"0")	=IF(AC11=1;1;0)	=IF(AC11=2;1;0)
=COUNTIF(\$V12:\$AA12;"0")	=IF(AC12=1;1;0)	=IF(AC12=2;1;0)
=COUNTIF(\$V13:\$AA13;"0")	=IF(AC13=1;1;0)	=IF(AC13=2;1;0)
=COUNTIF(\$V14:\$AA14;"0")	=IF(AC14=1;1;0)	=IF(AC14=2;1;0)
=COUNTIF(\$V15:\$AA15;"0")	=IF(AC15=1;1;0)	=IF(AC15=2;1;0)
=COUNTIF(\$V16:\$AA16;"0")	=IF(AC16=1;1;0)	=IF(AC16=2;1;0)

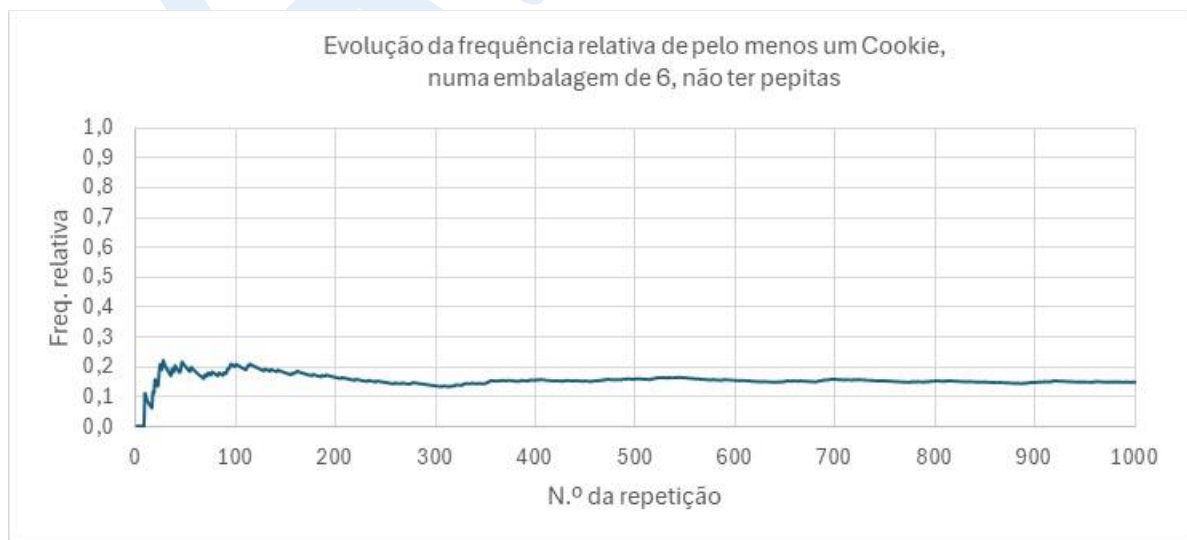
4. Repetir os passos descritos nos pontos anteriores muitas vezes, até a frequência relativa do número de Cookies sem pepitas estabilizar, o que, com frequência, acontece com 1 000 repetições.

A frequência relativa de, numa embalagem de 6 Cookies, haver pelo menos um Cookie sem pepitas, é obtida fazendo a soma da coluna AD com a coluna AE e

dividindo por 1 000, ou seja, calculando a frequência relativa do número de embalagens em que um ou dois Cookies não tinham pepitas de chocolate.

5. O resultado da metodologia descrita nos passos anteriores é apresentado a seguir:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE		
1	Número do lançamento																				Quantas vezes se verificou o						Quantas vezes houve Cookies sem pepitas?	1 Cookie sem pepitas	2 Cookies sem pepitas				
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	1?	2?	3?	4?	5?	6?							
3	4	5	4	3	4	1	2	5	6	5	4	5	5	3	1	1	4	4	6	2	3	2	2	6	5	2	0	0	0				
4	1	1	2	6	2	4	5	6	3	4	4	5	6	4	2	1	5	5	6	3	3	3	2	4	4	4	0	0	0				
5	2	6	1	4	3	2	5	3	1	6	2	3	3	2	1	3	1	3	4	1	5	4	6	2	1	2	0	0	0				
6	6	6	5	4	5	4	5	2	1	2	6	5	3	6	2	3	4	3	2	5	1	4	3	3	5	4	0	0	0				
7	4	1	3	1	1	4	2	5	6	4	4	4	2	4	6	1	2	5	5	6	4	3	1	6	3	3	0	0	0				
8	1	6	5	2	4	3	1	1	2	3	3	1	6	2	3	4	5	2	3	6	4	4	5	2	2	3	0	0	0				
9	5	2	6	5	5	4	2	5	2	6	3	2	6	3	4	1	4	1	2	1	3	5	2	3	4	3	0	0	0				
10	4	4	5	1	2	1	5	1	2	5	6	5	5	1	1	6	6	6	2	4	5	3	0	3	5	4	1	1	0				
11	1	5	3	4	1	2	2	2	3	6	2	2	5	2	4	2	3	2	4	2	9	3	3	2	1	0	0	0					
12	5	3	1	5	3	5	5	4	4	4	3	4	4	4	1	3	4	6	2	1	3	1	4	7	4	1	0	0	0				
13	6	4	2	4	1	1	4	6	2	2	2	4	4	2	3	5	4	5	2	3	2	6	2	6	2	2	0	0	0				
14	3	2	4	1	6	5	2	6	4	4	1	1	5	2	2	4	1	2	4	6	4	5	1	5	2	3	0	0	0				
15	1	1	1	3	4	2	6	5	3	1	6	3	1	4	4	2	4	6	4	1	6	2	3	5	1	3	0	0	0				
16	2	2	5	4	2	3	2	3	2	3	4	3	2	3	2	3	4	3	3	5	0	7	8	3	2	0	2	0	1				
...																																	
991	5	4	6	3	2	3	2	6	4	5	1	6	3	2	4	3	5	5	2	4	1	4	4	4	4	3	0	0	0				
992	3	1	4	1	5	6	4	2	1	4	6	5	4	2	3	5	5	3	3	4	3	2	4	5	4	2	0	0	0				
993	6	3	3	3	5	3	5	3	3	3	4	4	1	1	2	5	3	2	1	6	3	2	8	2	3	2	0	0	0				
994	3	2	3	1	2	6	5	3	3	6	5	1	3	2	6	6	6	1	5	4	3	3	5	1	3	5	0	0	0				
995	2	5	2	2	6	1	6	4	3	5	1	3	1	4	6	6	6	5	3	6	3	3	3	2	3	6	0	0	0				
996	1	5	4	5	1	1	2	6	6	1	3	6	3	2	1	2	6	6	6	5	5	3	2	1	3	6	0	0	0				
997	5	6	1	6	1	3	1	3	2	5	2	1	2	6	6	1	3	4	1	3	6	3	4	1	2	4	0	0	0				
998	4	1	3	5	2	4	6	5	3	3	1	1	2	1	3	1	5	6	3	2	5	3	5	2	3	2	0	0	0				
999	3	2	3	2	2	3	3	1	2	2	5	3	1	3	1	2	3	3	4	3	7	8	1	1	0	1	1	0					
1000	1	4	1	6	5	5	6	3	6	5	3	5	2	5	5	6	1	1	2	5	4	2	2	1	7	4	0	0	0				
1001	4	3	1	6	5	6	2	1	6	4	6	3	3	2	4	1	1	5	5	2	4	3	3	3	3	4	0	0	0				
1002	3	5	4	6	5	4	2	5	2	2	6	2	5	4	1	2	5	2	4	2	1	7	1	4	5	2	0	0	0				
1003																					3332	3304	3318	3303	3380	3363	####	159	143	8			
1004																																	
1005																					dado equilibrado	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17	Estimativa	Probabilidade				
1006																												15%					



Observação – Uma vez que se utilizou a função RAND() para simular o lançamento do dado, aproveitou-se para testar se os 20 000 lançamentos eram compatíveis com um dado equilibrado, tendo-se obtido para cada face a frequência relativa de aproximadamente 17% (resultado apresentado na folha de Excel anterior).

Conclusão

Como resultado da simulação, verificou-se que, nas 1 000 repetições, 143 embalagens tinham um Cookie sem pepitas e 8 embalagens tinham 2 Cookies sem pepitas, pelo que **uma estimativa para a probabilidade de haver pelo menos um Cookie sem pepitas na embalagem é 15%**.

Assim, pode-se concluir que uma estimativa para a probabilidade de todos os Cookies da embalagem terem pepitas é 85%.

Nota – Uma resolução teórica para a questão anterior pode ser consultada em *A Collection of Dice Problems with solutions and useful appendices (a work continually in progress)* version September 8, 2018, Matthew M. Conroy, pdf., página 12. Neste texto, o autor calcula a probabilidade de, no lançamento de um dado n vezes, todas as faces aparecerem. No caso de $n=20$, o resultado a que chega é de 85%.