

TarefaALEA - Probabilidade

N.º 6 – Propagação de uma doença contagiosa, numa sala com 6 pessoas¹



Considere-se uma variante de uma gripe, bastante contagiosa, que tem um período de infeção de um dia e que se propaga de acordo com as seguintes regras:

- Se uma pessoa com a doença entrar em contacto com outra pessoa, infeta-a;
- Se uma pessoa já tiver sido infetada e for contactada por uma pessoa infetada, o contágio acaba ali, pois uma pessoa não pode ser infetada novamente;
- Uma pessoa não se pode contagiar a si própria².

Num pequeno apartamento vivem seis pessoas. Uma destas pessoas contrai a doença e contacta, aleatoriamente, uma das outras pessoas, à qual transmite a doença. Esta segunda pessoa encontra, aleatoriamente, uma terceira, a quem transmite a doença. O processo continua até que a pessoa infetada contacte aleatoriamente uma que ainda não tenha sido infetada ou até que a pessoa contactada esteja imune (por já ter sido infetada), acabando o contágio.

Pretende-se estudar a evolução da doença, nomeadamente com a resposta às seguintes questões:

1. Quantas pessoas podem ser infetadas, até que o contágio acabe?
2. Representando por X a variável aleatória (v.a.) que representa o número de pessoas infetadas, até que o contágio acabe, obter, por simulação, uma estimativa para o modelo de probabilidade de X .

¹ Adaptada de **Focus on Statistics**. Investigations for the Integration of Statistics into Grades 9-12 Mathematics Classrooms, **Sara Brown Mathematics Institute of Wisconsin**, **Patrick Hopfensperger Retired**, University of Wisconsin-Milwaukee, **Henry Kranendonk** Marquette University, Copyright ©2020 by American Statistical Association, Alexandria, VA 22314-1943, página 151.

² A imagem foi adaptada de <https://www.istockphoto.com/pt/search/2/image-film?phrase=cold+and+flu>.

3. A partir do modelo anterior, calcular uma estimativa para a probabilidade de todas as seis pessoas do apartamento serem contagiadas.
4. Obter a função massa de probabilidade da v.a. X e compará-la com as estimativas obtidas em 2.
5. Calcular a probabilidade de o número de pessoas infetadas:
 - i) Ser menor que 2;
 - ii) Ser menor que 6;
 - iii) Ser 3, 4 ou 5;
 - iv) Ser menor ou igual a 6.

Respostas

1. Podem ser infetadas 2, 3, 4, 5 ou 6 pessoas.

A v.a. X pode assumir os valores inteiros entre 2 e 6, inclusive, pelo que o que se pretende é uma estimativa para as probabilidades $P(X = x)$, com $x = 2, 3, \dots, 6$ (Uma v. a. representa-se sempre por uma letra maiúscula, enquanto um valor observado dessa variável aleatória se representa por uma letra minúscula).

2. Para responder a esta questão, é necessário proceder à recolha de dados. Vai-se considerar um processo de simulação para obter os dados, que irão permitir obter a frequência relativa com que os acontecimentos se verificam, e utilizar essas frequências relativas como estimativas das probabilidades pretendidas. No processo de simulação, recorre-se à folha de Excel.

Metodologia para realizar a simulação

Um processo possível pode ser o que se sugere a seguir:

- a) Consideram-se as 6 pessoas da casa, numeradas de 1 a 6.
- b) Numa folha de Excel, gera-se um 1.º número entre 1 e 6, inclusive, que representa a pessoa que começa o contágio entre os restantes. Gera-se um 2.º número, que representa a pessoa infetada pela anterior. O processo de contágio continua até que todos os números entre 1 e 6 tenham sido obtidos, ou seja, todas as pessoas tenham sido infetadas, ou até que o próximo número gerado seja um que já tenha saído anteriormente, o que significa que a pessoa já terá sido infetada, e o contágio acaba aí. Sempre que um número gerado seja igual ao anterior, não se considera, pois uma pessoa não se pode contagiar a si própria. Quando qualquer uma das condições referidas anteriormente se verificar, conta-se o número de pessoas infetadas e regista-se esse valor.

Numa primeira simulação, que se apresenta a seguir,

	A	B	C	D	E	F
1	1.ª pessoa com a doença	Propagação da doença até que encontre uma pessoa imune ou as 6 tenham sido sejam contagiadas				
2	2	1	4	6	2	4

o número de pessoas infectadas foi de 4.

- c) Repete-se o processo referido na alínea anterior um grande número de vezes. Apresenta-se a seguir a folha de Excel com algumas das repetições, das 400 realizadas:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	1.ª pessoa com a doença	Propagação da doença até que encontre uma pessoa imune ou as 6 tenham sido sejam contagiadas												N.º de pessoas infetadas
2	2	1	4	6	2	4	1	4	4	4	6	5		4
3	6	2	5	1	2	3	3	2	3	2	5	4		4
4	4	3	3	1	2	5	4	2	4	5	2	6		5
5	1	5	2	3	2	6	4	5	6	3	1	4		4
6	2	4	3	3	2	5	1	1	6	5	2	4		3
7	6	6	2	5	1	4	3	5	3	2	6	1		6
8	6	5	3	2	4	5	4	2	2	4	5	1		5
9	1	6	2	2	2	3	3	6	1	5	5	5		4

Para facilitar o processo de simulação, uma opção é gerar vários números entre 1 e 6 – neste caso, geraram-se 12, e só a seguir proceder à contagem.

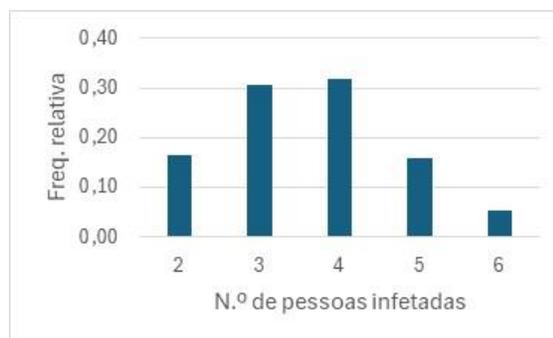
Assinalaram-se a amarelo a célula que cumpria as condições para parar o processo de contágio. Assinalaram-se a rosa as situações correspondentes a pessoas que não podiam ser contagiadas, pois uma pessoa não se pode contagiar a si própria, não entrando para a contagem.

- d) Regista-se numa tabela de frequências o número de vezes que, nas repetições realizadas, se obteve 2, 3, 4, 5 ou 6 pessoas infetadas, até terminar o contágio.

	A	F
1	X=x	Freq. abs.
2	2	66
3	3	122
4	4	127
5	5	64
6	6	21
7		400

- e) A partir da tabela obtida na alínea anterior, calculam-se as frequências relativas que se consideram como estimativas para o modelo de probabilidade da v.a. X – N.º de pessoas infetadas, e constrói-se o diagrama de barras respetivo:

	A	F	G
1	$X=x$	Freq. abs.	Freq. rel.
2	2	66	0,17
3	3	122	0,31
4	4	127	0,32
5	5	64	0,16
6	6	21	0,05
7		400	



3. Uma estimativa para a probabilidade de todas as pessoas terem sido infetadas é 5%.
4. A função massa de probabilidade (f.m.p) da v.a. X – N.º de pessoas infetadas, é constituída pelos valores que X pode assumir e as respetivas probabilidades, que se apresentam na tabela seguinte:

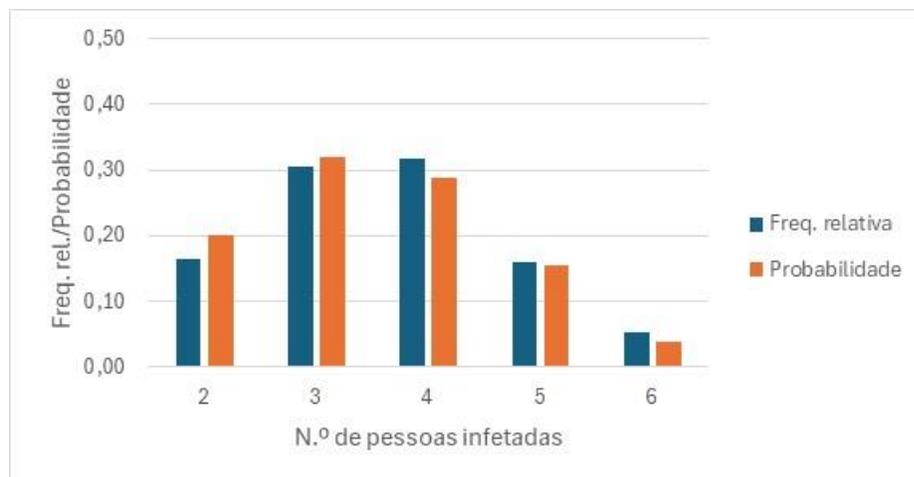
$X = x$	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{5}{5} \times \frac{1}{5}$	$\frac{5}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{5}$	$\frac{5}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5}$	$\frac{5}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{4}{5}$	$\frac{5}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{5}$

donde

$X = x$	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	0,20	0,32	0,29	0,15	0,04

Repare-se que, como seria de esperar, a soma das probabilidades é igual a 1.

No gráfico seguinte, apresenta-se a f.m.p e o gráfico de barras dos dados obtidos por simulação:



É pressuposto que um número de simulações superior às realizadas conduza a estimativas melhores para as probabilidades.

5. A partir do modelo de probabilidade obtido para a v.a. X , tem-se:

i) $P(\text{N.º de pessoas infetadas ser menor que } 2) = P(X < 2) = 0$

ii) $P(\text{N.º de pessoas infetadas ser menor que } 6) = P(X < 6) = 1 - P(X = 6)$
 $= 1 - 0,04$
 $= 0,96$ ou 96%

iii) $P(\text{N.º de pessoas infetadas ser } 3 \text{ ou } 4 \text{ ou } 5) = P(X = 3 \text{ ou } 4 \text{ ou } 5)$
 $= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$
 $= 0,32 + 0,29 + 0,15$
 $= 0,76$ ou 76%

iv) $P(\text{N.º de pessoas infetadas ser menor ou igual a } 6) = P(X \leq 6) = 1$ ou 100%