

# TarefALEA - Probabilidade

## N.º7 – O problema das 4 chaves



O João pediu ao pai que lhe emprestasse a casa de férias para fazer uma festa com os amigos, comemorando o seu aniversário. O pai prontificou-se a satisfazer o desejo do filho, mas aproveitou para lhe lançar o seguinte desafio:

– Tenho 4 chaves, aparentemente iguais, mas só uma abre a porta. Levas as 4 chaves e, se conseguires abrir a porta à primeira ou à segunda tentativa, empresto-te a casa para a festa e pago-te as despesas que fizeres! No entanto, se só abrires à terceira ou quarta tentativa, só te empresto a casa e pagas tu as despesas com as tuas economias!

O João ficou um pouco “desiludido”, pois a sua intuição dizia-lhe que seria mais provável acertar à terceira ou quarta tentativa do que à primeira ou segunda, pelo que certamente perderia a oportunidade de ter as despesas da festa pagas!<sup>1</sup>

Afinal o que é que será mais provável?

### Questão

Consideram-se 4 chaves, aparentemente iguais, mas em que só uma abre a porta.

- 1 - Tenta-se abrir a porta com uma das 4 chaves, escolhida ao acaso;
- 2 - Se não abrir a porta, descarta-se essa chave e faz-se uma segunda tentativa com uma das 3 chaves restantes;
- 3 - Se não abrir a porta, faz-se uma terceira tentativa com uma das 2 chaves restantes;
- 4 - Se não abrir a porta, faz-se uma quarta tentativa com a chave restante, que abre a porta, de certeza!

**Qual a probabilidade de abrir a porta à 1.<sup>a</sup> ou 2.<sup>a</sup> tentativa?**

**Qual a probabilidade de abrir a porta à 3.<sup>a</sup> ou 4.<sup>a</sup> tentativa?**

Esta questão pode ser respondida utilizando a interpretação **clássica** de Probabilidade e o conceito de probabilidade condicionada, a que se dará o nome de abordagem **teórica**, ou utilizando a abordagem **empírica** ou **frequencista**, para estimar a probabilidade.

<sup>1</sup> A imagem foi adaptada de <https://pixabay.com/pt/photos/chave-multicolorido-correspond%C3%A2ncia-74534/>.

## Abordagem teórica

Representem-se as 4 chaves por Ch1, Ch2, Ch3 e Ch4. Sem perda de generalidade, admita-se que a chave que abre a porta é a chave representada por Ch1. Utilize-se a seguinte notação para significar que a chave certa é escolhida à 1.<sup>a</sup>, 2.<sup>a</sup>, 3.<sup>a</sup> ou 4.<sup>a</sup> tentativa: Ch1<sub>1</sub>, Ch1<sub>2</sub>, Ch1<sub>3</sub> e Ch1<sub>4</sub>.

- Probabilidade de abrir a porta à 1.<sup>a</sup> tentativa:

$$P(\text{Ch1}_1) = \frac{1}{4}$$

- Probabilidade de abrir a porta à 2.<sup>a</sup> tentativa:

$$\begin{aligned} P(\text{Não escolher Ch1}_1 \text{ e Escolher Ch1}_2) &= P(\text{Não escolher Ch1}_1) \times P(\text{Escolher Ch1}_2 | \text{Não escolheu Ch1}_1) \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

- Probabilidade de abrir a porta à 3.<sup>a</sup> tentativa:

$$\begin{aligned} P(\text{Não escolher Ch1}_1 \text{ e Não escolher Ch1}_2 \text{ e Escolher Ch1}_3) &= P(\text{Não escolher Ch1}_1) \\ &\quad \times P(\text{Não escolher Ch1}_2 | \text{Não escolheu Ch1}_1) \\ &\quad \times P(\text{Escolher Ch1}_3 | \text{Não escolheu Ch1}_1 \text{ e Não escolheu Ch1}_2) \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

- Probabilidade de abrir a porta à 4.<sup>a</sup> tentativa:

$$\begin{aligned} P(\text{Não escolher Ch1}_1 \text{ e Não escolher Ch1}_2 \text{ e Não escolher Ch1}_3 \text{ e Escolher Ch1}_4) &= P(\text{Não escolher Ch1}_1) \times P(\text{Não escolher Ch1}_2 | \text{Não escolheu Ch1}_1) \\ &\quad \times P(\text{Não escolher Ch1}_3 | \text{Não escolheu Ch1}_1 \text{ e Não escolheu Ch1}_2 \text{ e Não escolheu Ch1}_3) \\ &\quad \times P(\text{Escolher Ch1}_4 | \text{Não escolheu Ch1}_1 \text{ e Não escolheu Ch1}_2 \text{ e Não escolheu Ch1}_3) \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Na tabela seguinte, resumem-se os resultados obtidos anteriormente:

| N.º tentativa       | 1. <sup>a</sup> Tentativa | 2. <sup>a</sup> tentativa | 3. <sup>a</sup> tentativa | 4. <sup>a</sup> tentativa |
|---------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| Prob. abrir a porta | 25%                       | 25%                       | 25%                       | 25%                       |

## Conclusão

Afinal, contra a intuição do João, é tão provável abrir a porta à 1.<sup>a</sup> tentativa, como à 2.<sup>a</sup>, à 3.<sup>a</sup> ou à 4.<sup>a</sup>.

Assim, o João teria uma probabilidade de 50% de ter as despesas da festa pagas... Nada mau!

## Abordagem empírica

Para simular o concurso, como descrito inicialmente, pode-se utilizar a seguinte metodologia, considerando uma folha de cálculo, como o Excel:

1. Na coluna A gera-se um número aleatório inteiro entre 1 e 4, inclusive, para simular a chave escolhida na 1.<sup>a</sup> tentativa. Na coluna B, testa-se se o valor obtido é 1, que corresponde à chave certa;
2. Se no passo 1, não se obteve o valor 1, então na coluna C, gera-se um número aleatório inteiro entre 1 e 3, inclusive, para simular a chave escolhida na 2.<sup>a</sup> tentativa. Na coluna D testa-se se o valor obtido é 1, que corresponde à chave certa.
3. Se nos passos 1 e 2, não se obteve o valor 1, então na coluna E gera-se um número aleatório inteiro entre 1 e 2, inclusive, para simular a chave escolhida na 3.<sup>a</sup> tentativa. Na coluna F testa-se se o valor obtido é 1, que corresponde à chave certa.
4. Se nos passos 1, 2 ou 3 não se obteve o valor 1, o que é testado na coluna G, então considera-se 1, porque agora já só há a chave 1 para abrir a porta.

A seguir é apresentada parte da folha de Excel, com as fórmulas correspondentes aos passos 1, 2, 3 e 4:

|   | A                | B                   | C                             | D                   | E                                | F                   | G                                   |
|---|------------------|---------------------|-------------------------------|---------------------|----------------------------------|---------------------|-------------------------------------|
| 1 |                  | 1 <sup>a</sup> tent |                               | 2 <sup>a</sup> tent |                                  | 3 <sup>a</sup> tent | 4 <sup>a</sup> tent                 |
| 2 | =INT(RAND()*4)+1 | =IF(A2=1;1;0)       | =IF(A2=1;0;(INT(RAND()*3)+1)) | =IF(C2=1;1;0)       | =IF((B2+D2)=1;0;INT(RAND()*2+1)) | =IF(E2=1;1;0)       | =IF((B2+D2+F2)=1;0;INT(RAND()*1+1)) |
| 3 | =INT(RAND()*4)+1 | =IF(A3=1;1;0)       | =IF(A3=1;0;(INT(RAND()*3)+1)) | =IF(C3=1;1;0)       | =IF((B3+D3)=1;0;INT(RAND()*2+1)) | =IF(E3=1;1;0)       | =IF((B3+D3+F3)=1;0;INT(RAND()*1+1)) |
| 4 | =INT(RAND()*4)+1 | =IF(A4=1;1;0)       | =IF(A4=1;0;(INT(RAND()*3)+1)) | =IF(C4=1;1;0)       | =IF((B4+D4)=1;0;INT(RAND()*2+1)) | =IF(E4=1;1;0)       | =IF((B4+D4+F4)=1;0;INT(RAND()*1+1)) |
| 5 | =INT(RAND()*4)+1 | =IF(A5=1;1;0)       | =IF(A5=1;0;(INT(RAND()*3)+1)) | =IF(C5=1;1;0)       | =IF((B5+D5)=1;0;INT(RAND()*2+1)) | =IF(E5=1;1;0)       | =IF((B5+D5+F5)=1;0;INT(RAND()*1+1)) |
| 6 | =INT(RAND()*4)+1 | =IF(A6=1;1;0)       | =IF(A6=1;0;(INT(RAND()*3)+1)) | =IF(C6=1;1;0)       | =IF((B6+D6)=1;0;INT(RAND()*2+1)) | =IF(E6=1;1;0)       | =IF((B6+D6+F6)=1;0;INT(RAND()*1+1)) |
| 7 | =INT(RAND()*4)+1 | =IF(A7=1;1;0)       | =IF(A7=1;0;(INT(RAND()*3)+1)) | =IF(C7=1;1;0)       | =IF((B7+D7)=1;0;INT(RAND()*2+1)) | =IF(E7=1;1;0)       | =IF((B7+D7+F7)=1;0;INT(RAND()*1+1)) |
| 8 | =INT(RAND()*4)+1 | =IF(A8=1;1;0)       | =IF(A8=1;0;(INT(RAND()*3)+1)) | =IF(C8=1;1;0)       | =IF((B8+D8)=1;0;INT(RAND()*2+1)) | =IF(E8=1;1;0)       | =IF((B8+D8+F8)=1;0;INT(RAND()*1+1)) |
| 9 | =INT(RAND()*4)+1 | =IF(A9=1;1;0)       | =IF(A9=1;0;(INT(RAND()*3)+1)) | =IF(C9=1;1;0)       | =IF((B9+D9)=1;0;INT(RAND()*2+1)) | =IF(E9=1;1;0)       | =IF((B9+D9+F9)=1;0;INT(RAND()*1+1)) |

...

|       | A                | B                 | C                                 | D                 | E  | F                 | G   |
|-------|------------------|-------------------|-----------------------------------|-------------------|--|-------------------|---|
| 9993  | =INT(RAND()*4)+1 | =IF(A9993=1;1;0)  | =IF(A9993=1;0;(INT(RAND()*3)+1))  | =IF(C9993=1;1;0)  | =IF((B9993+D9993)=1;0;INT(RAND()*2+1))   | =IF(E9993=1;1;0)  | =IF((B9993+D9993+F9993)=1;0;INT(RAND()*1+1))    |
| 9994  | =INT(RAND()*4)+1 | =IF(A9994=1;1;0)  | =IF(A9994=1;0;(INT(RAND()*3)+1))  | =IF(C9994=1;1;0)  | =IF((B9994+D9994)=1;0;INT(RAND()*2+1))   | =IF(E9994=1;1;0)  | =IF((B9994+D9994+F9994)=1;0;INT(RAND()*1+1))    |
| 9995  | =INT(RAND()*4)+1 | =IF(A9995=1;1;0)  | =IF(A9995=1;0;(INT(RAND()*3)+1))  | =IF(C9995=1;1;0)  | =IF((B9995+D9995)=1;0;INT(RAND()*2+1))   | =IF(E9995=1;1;0)  | =IF((B9995+D9995+F9995)=1;0;INT(RAND()*1+1))    |
| 9996  | =INT(RAND()*4)+1 | =IF(A9996=1;1;0)  | =IF(A9996=1;0;(INT(RAND()*3)+1))  | =IF(C9996=1;1;0)  | =IF((B9996+D9996)=1;0;INT(RAND()*2+1))   | =IF(E9996=1;1;0)  | =IF((B9996+D9996+F9996)=1;0;INT(RAND()*1+1))    |
| 9997  | =INT(RAND()*4)+1 | =IF(A9997=1;1;0)  | =IF(A9997=1;0;(INT(RAND()*3)+1))  | =IF(C9997=1;1;0)  | =IF((B9997+D9997)=1;0;INT(RAND()*2+1))   | =IF(E9997=1;1;0)  | =IF((B9997+D9997+F9997)=1;0;INT(RAND()*1+1))    |
| 9998  | =INT(RAND()*4)+1 | =IF(A9998=1;1;0)  | =IF(A9998=1;0;(INT(RAND()*3)+1))  | =IF(C9998=1;1;0)  | =IF((B9998+D9998)=1;0;INT(RAND()*2+1))   | =IF(E9998=1;1;0)  | =IF((B9998+D9998+F9998)=1;0;INT(RAND()*1+1))    |
| 9999  | =INT(RAND()*4)+1 | =IF(A9999=1;1;0)  | =IF(A9999=1;0;(INT(RAND()*3)+1))  | =IF(C9999=1;1;0)  | =IF((B9999+D9999)=1;0;INT(RAND()*2+1))   | =IF(E9999=1;1;0)  | =IF((B9999+D9999+F9999)=1;0;INT(RAND()*1+1))    |
| 10000 | =INT(RAND()*4)+1 | =IF(A10000=1;1;0) | =IF(A10000=1;0;(INT(RAND()*3)+1)) | =IF(C10000=1;1;0) | =IF((B10000+D10000)=1;0;INT(RAND()*2+1)) | =IF(E10000=1;1;0) | =IF((B10000+D10000+F10000)=1;0;INT(RAND()*1+1)) |
| 10001 | =INT(RAND()*4)+1 | =IF(A10001=1;1;0) | =IF(A10001=1;0;(INT(RAND()*3)+1)) | =IF(C10001=1;1;0) | =IF((B10001+D10001)=1;0;INT(RAND()*2+1)) | =IF(E10001=1;1;0) | =IF((B10001+D10001+F10001)=1;0;INT(RAND()*1+1)) |
| 10002 |                  | =SUM(B2:B10001)   |                                   | =SUM(D2:D10001)   |  | =SUM(F2:F10001)   | =SUM(G2:G10001)                                 |

Foram feitas 10 000 repetições.

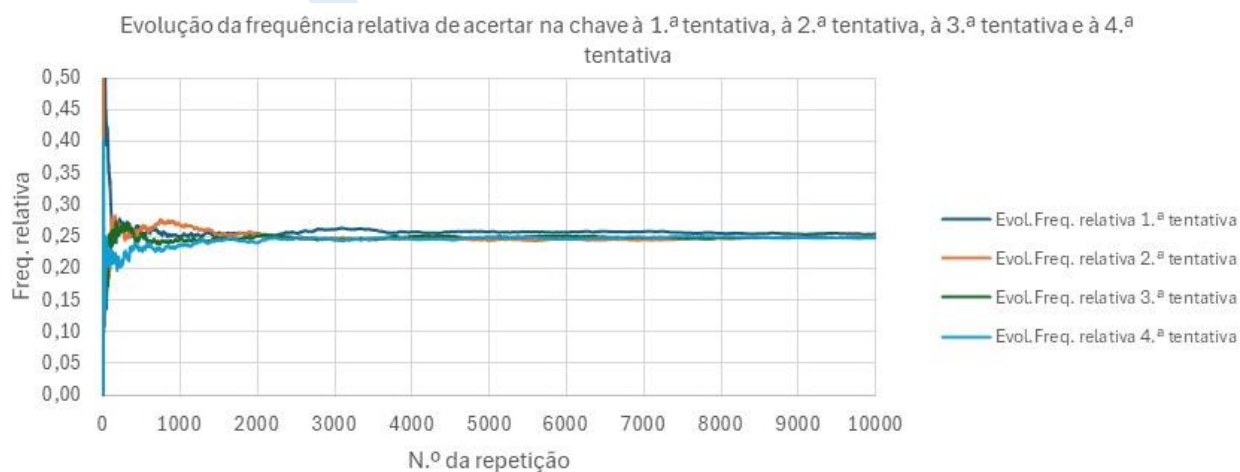
A soma dos valores obtidos nas colunas B, D, F ou G, dá o número de vezes que nestas 10000 repetições a chave certa foi escolhida à 1.ª, 2.ª, 3.ª ou 4.ª tentativa, respetivamente. Os resultados foram os seguintes:

|   | A       | B | C       | D | E       | F | G       |
|---|---------|---|---------|---|---------|---|---------|
| 1 | 1.ªtent |   | 2.ªtent |   | 3.ªtent |   | 4.ªtent |
| 2 | 3       | 0 | 1       | 1 | 0       | 0 | 0       |
| 3 | 1       | 1 | 0       | 0 | 0       | 0 | 0       |
| 4 | 2       | 0 | 3       | 0 | 1       | 1 | 0       |
| 5 | 3       | 0 | 2       | 0 | 2       | 0 | 1       |
| 6 | 1       | 1 | 0       | 0 | 0       | 0 | 0       |
| 7 | 4       | 0 | 3       | 0 | 2       | 0 | 1       |
| 8 | 2       | 0 | 1       | 1 | 0       | 0 | 0       |
| 9 | 3       | 0 | 3       | 0 | 1       | 1 | 0       |

...

|       | A | B    | C | D    | E | F    | G    |
|-------|---|------|---|------|---|------|------|
| 9992  | 1 | 1    | 0 | 0    | 0 | 0    | 0    |
| 9993  | 2 | 0    | 2 | 0    | 1 | 1    | 0    |
| 9994  | 4 | 0    | 2 | 0    | 1 | 1    | 0    |
| 9995  | 3 | 0    | 3 | 0    | 2 | 0    | 1    |
| 9996  | 4 | 0    | 3 | 0    | 2 | 0    | 1    |
| 9997  | 2 | 0    | 2 | 0    | 2 | 0    | 1    |
| 9998  | 1 | 1    | 0 | 0    | 0 | 0    | 0    |
| 9999  | 1 | 1    | 0 | 0    | 0 | 0    | 0    |
| 10000 | 3 | 0    | 2 | 0    | 1 | 1    | 0    |
| 10001 | 1 | 1    | 0 | 0    | 0 | 0    | 0    |
| 10002 |   | 2541 |   | 2493 |   | 2489 | 2477 |

O gráfico de linhas seguinte mostra a evolução da frequência relativa da chave certa ter sido escolhida à 1.ª, 2.ª, 3.ª ou 4.ª tentativa:



## Conclusão

As quatro frequências relativas estabilizam em 25%, donde concluímos que, de acordo com os resultados obtidos na abordagem teórica, são boas estimativas para as probabilidades pretendidas.

## Comparação dos resultados empíricos, com os resultados teóricos

Resumindo os resultados obtidos anteriormente, temos para as probabilidades do pai do João emprestar a casa e pagar as despesas, ou só emprestar a casa, os seguintes valores e respetivas estimativas:

|                                 | Emprestar a casa e pagar as despesas | Emprestar a casa |
|---------------------------------|--------------------------------------|------------------|
| Probabilidade                   | 50%                                  | 50%              |
| Estimativa para a probabilidade | 50%                                  | 50%              |